NUOVI ISTROMENTI
PER LA
DESCRIZIONE DI DIVERSE CURVE
ANTICHE E MODERNE.

NUOVI ISTROMENTI
PER LA
DESCRIZIONE DI DIVERSE CURVE
ANTICHE E MODERNE

E di molte altre, che servir possono alla speculazione de' Geometri, ed all' uso de' Pratici.

COL PROGETTO

DI DUE NUOVE MACCHINE PER LA NAUTICA ED UNA PER LA MECCANICA,

E con alcune Osservazioni sopra de' Poligoni rettilinei regolari

DEL CONTE GIAMBATISTA SUARDI
BRESCIANO.







IN BRESCIA. MDCCLII.
Dalle Stampe di GIAN-MARIA RIZZARDI.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.





AL SERENISSIMO PRINCIPE

FRANCESCO LOREDANO

DOGE DI VENEZIA

GIAMBATISTA SUARDI.



Li Scrittori di quante nazioni ebbero in pregio le lettere e le ſcienze ſi tennero in ogni tempo tanto più fortunati e glorioſi, quanto più loro occorſe di poter dedicare

§ 2 le

le opere loro a Perſonaggi più illuſtri, o per la fama degli Antenati, o per proprio merito chiari e ragguardevoli. Perciò, SERENISSIMO PRINCIPE, allorchè, emulando anch' io l' altrui lodevole coſtume, ardii di umilmente preſentarvi queſti primi frutti del mio tenue ingegno, e che con ſomma degnazione vi compiaceſte d' accettarli, ſe ſi conſidera la grandezza di V. SERENITA', a cui furono conſacrati, tornò in mia grandiſſima riputazione ed onore. Ma per dir vero non tanto m' induſſe a fare ſcelta di Voi l' onorata immortale memoria de' Voſtri Avoli, che cotanto in pace e in guerra fiorirono, come un Franceſco, un Giovanni, un Antonio, un Pietro, un Lionardo, e cent' altri celebri nell' Iſtorie d' Italia, quantò la Sovrana Virtù propria di V. SERENITA'. Queſta parve che da que' Voſtri Maggiori, ne' quali eraſi ampla-

mente

mente diffusa e sparsa, si fosse poi tutta tornata a riunire in Voi solo, per chiudere con quanto v' ha di sublime, di magnanimo, e d' ottimo l' eletta schiera di tante generose Anime trapassate. Imperocchè siccome Virtù tanto singolare altamente si distinse ne' più ardui affari di cotesta Repubblica per divino favore da tanti secoli dominante, e nella cospicua dignità di Generale in Palma, e nel vasto carico di Savio-grande in Patria, così non meno luminosa comparve in quella non mai abbastanza ammirata magnificenza e splendidezza a signorile cortesia e affabilità mirabilmente congiunta. Per il che da cotesto santissimo e augusto Senato fu poi anche segnalata e distinta, non solo quando foste eletto Ambasciadore alle Maestà degl' Imperadori Carlo VII. e Francesco I., ma molto più allora, che con universale aspettazione, e fra le acclamazioni di tutti i

buoni

buoni foste dal Serenissimo Maggior Concilio al supremo grado della Repubblica elevato. Novella, SERENISSIMO PRINCIPE, che fu bensì con infinito aggradimento ricevuta anche da tutti i Monarchi d' Europa, ma che però non giunse loro improvvisa; perchè eglino nell' egregia indole e saggia mente di un tale amplissimo e ornatissimo Senatore renduto famoso per innumerabili gesta, e valorose azioni, avevano già chiaramente letto il felice presagio, che da gran tempo vi destinava al trono, come modello di ottimo e perfetto Principe. Ma che vo io rivolgendomi in mente l' eccelse vostre qualità, che quanto più grande vi conosco, tanto meno adeguate grazie render vi posso per l' onore, a cui crebbero i miei scritti ornati dall' eterno Vostro Nome? In fatti quand' anche per alcun loro difetto non potessero tener gran posto

tra

tra i fasti di questo eruditissimo secolo, avverrà se non altro, che gli Scrittori delle più colte Nazioni m'abbiano invidia di un sì gran Mecenate come è VOSTRA SERENITA', a cui per fine prego dal Cielo con tutto lo spirito ogni più desiderata felicità, e colla maggior riverenza mi raccomando.

TA-

. . . . . . *neque te ut miretur turba labores*
Contentus paucis lectoribus.

Horat. lib. I. Sat. 10.

TAVOLA

Delle materie contenute in questo Volume.

Quadra-

Errori più notabili da correggersi.

		ERRORI	CORREZIONI
Pag. 12.	Lin. 28.	è	e
Pag. 17.	Lin. 4.	nel Commento *Fig.* 3.	*Fig.* 4.
Pag. 21.	Lin. 12.	NDFQ	MDFQ
	Lin. 31.	CG	CH
Pag. 23.	Lin. 2.	C*b*	CD
Pag. 26.	Lin. 19.	avvegnachè forse, se	avvegnachè, se
Pag. 69.	Lin. 26.	Che si	Che se
Pag. 79.	Lin. 23.	recarvele	recarvela
Pag. 80.	Lin. 10.	della Tavola	delle Tavole
Pag. 89.	Lin. 4.	raggio *rs*	raggio *r* S
Pag. 97.	Lin. 20.	vengono	vengano
Pag. 105.	Lin. 7.	retna	retta
Pag. 133.	Lin. 5.	*ng*; che	*ng*, che
Pag. 155.	Lin. 2.	*qd*	Q*d*
Pag. 168.	Lin. 21.	l' assile D	l'assile D*a*
Pag. 172.	Lin. 19.	nel Commento *infra nullum*	*infra lineam*
Pag. 182.	Lin. 25.	dell' Equatore	dall' Equatore
Pag. 188.	Lin. 30.	in tal caso tanto men	in tal caso andrà tanto men
Pag. 245.	Lin. 3.	*qn*Q	*q*NQ
Pag. 265.	Lin. 27.	all'angolo, alla periferia	all' angolo alla periferia
Pag. 273.	Lin. 27.	*bd*, *a* &c.	*bda* &c.

NUO-

NUOVI
ISTROMENTI
PER LA DESCRIZIONE

DI

DIVERSE CURVE
ANTICHE E MODERNE,

E di molt' altre, che servir possono alla speculazione de' Geometri, e all' uso de' Pratici.

PREFAZIONE.

La campagna, che per ordinario riesce altrui di sollievo e di ricreazione, a me già porse motivo di più serio trattenimento, quando accadendomi di osservarla con più attento animo nelle sue produzioni, ed ammirando specialmente i fiori, e le foglie m'avviddi, che per lo più portavano vagamente impressa la forma di una qualche Curva. Questo riflesso traendomi d'una in altra cosa m'indusse a voler tentare, se si potesse richiamare alle leggi di Meccanica la forma di alcune di quelle, e delineare con qualche ingegno le Curve, che ne caratterizzano le diverse specie. Per quanto strano mi paresse da principio questo pensiero, tuttavia dappoi tanto mi vi addomesticai, che d'indi passando a metter mano all'opera, mi venne fatto finalmente di descrivere con alcuni stromenti, oltre diverse Curve note a Matematici antichi e moderni, altre non poche somiglianti a un di presso a quelle, che osservate ne' campi erano state l'occasione, ed il soggetto delle prime mie meditazioni.

La costruzione adunque, e l'uso di cotali stromenti è appunto ciò che mi son ora determinato di dare alla luce; non per altra cagione, che più possa dar credito al mio consiglio, se non perchè mi son lusingato, che tal cosa potesse vantare qualche pregio di novità; la quale quanto suole piacere al pubblico, altrettanto rende scusabile un autore, che si lascia egli pure traportare da quella passione, che si ha di piacere ad altrui nel fargli un presente benchè tenue de' suoi ritrovamenti.

In fatti io posso asserire costantemente di non aver mai saputo, che altri abbiano prima scoperto cosa pubblicata ora da me come di mia invenzione. E benchè non essendomene forse assicurato con tutte le possibili diligenze, potrebbe alcuna cosa da me creduta mia essere già stata ritrovata da altri; nonostante mi parrebbe assai difficile, che o nella specie delle descritte Curve, o nel modo del descriverle, se per avventura fossero già state descritte, andassi io così sempre ad appor-

mi,

mi, e fatalmente urtare nello altrui, che in tutto questo trattato non avesse ancora a restarvi qualche cosa del mio.

Tuttavia non può negarsi, che ad un' Opera, cui non si contenda il titolo di novità, non si richieggano ancora delle altre prerogative, acciocchè venga generalmente ricevuta come degna delle stampe; quali forse sarebbero la dignità della materia, la rettitudine del discorso, e la purità dello stile, le quali da taluno o tutte od in parte si potriano in questi miei scritti desiderare. Ma che che siasi sperarei di poter agevolmente comportare, che altri mi accusasse di qualche mancamento, e si ponesse eziandio a contraddirmi liberamente; giacchè poi quanto al primo nulla più mi accaderebbe, che trovarmi avvolto nella folla di molti, che soggiacquero ad egual sorte, per esser tale la condizione delle umane imprese, che niuna veramente va esente da difetto. E quanto al secondo professandomi io d'apprezzare sopra tutto la verità, avrei anzi per bene, che conforme all' antica consuetudine di Socrate si procurasse di dargli un più bel giorno per mezzo della contraddizione. Questa però come che sogliasi spesso adoperare a capriccio, e rivolgere del pari contra le vili, e le pregevoli cose, non permette, al dir di Cicerone, altro modo più sicuro di sottrarsi al suo rigore, che rimanersi del tutto dallo scrivere. Il che se finora fosse accaduto, siccome non avrebbe il mondo letterato a dolersi di molte inutili e stucchevoli inezie, così per contrario deplorarebbe la privazione di non poche stupende, e vantaggiosissime scoperte. Nè è già che io quindi presuma di porre le mie piccole cose in paragon di queste ultime, ma d'inferire solamente, che per timore della contraddizione non doveva ritenermi dal pubblicarle; perchè quantunque non sia così insensibile di non risentirne diletto, quando almeno vengano accolte con benigno compatimento, però nemmeno sono per reputare ad ingiuria, quando vengano criticate o riprese, mentre per altissimo favore mi ritrovo in tale disposizione di animo, che più amo il merito che la lode, e sono egualmente preparato a sofferire un biasimo che mi faccia accorto de' miei falli, che a ricevere un' approvazione, che a torto ricompensi le mie fatiche.

ISTRO-

ISTROMENTO I.

PER LA DESCRIZIONE ORGANICA DELLE CONCOIDI.

SEBBENE Nicomede, Diocle, Dinoſtrato, Archimede nell' inveſtigare la duplicazione del cubo, la triſezione dell' angolo, o la quadratura del circolo furono men fortunati d' Ippocrate da Chio, cui per lo meno avvenne di quadrare geometricamente alcune porzioni o ſegmenti di quello, non perciò ſi conſerva di tutti loro meno onorata memoria, ſicchè delle quattro curve a tal fine inventate da eſſi, come d'ingegnoſe produzioni della riſpettabile antichità, non ſi faccia tuttavia grandiſſima ſtima. Ma perchè, non potendoſi eſſe delineare geometricamente, riuſcivano affatto inutili a quel fine appunto cui erano deſtinate; perciò ho creduto, che per avventura foſſe lodevol coſa deſcriverle almeno con qualche artificio meccanico, e prima

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Concoide di Nicomede.

NOn è già ch'io intenda di riferire l'origine di queſta curva (inventata (1) dal ſuo Autore per la duplicazione del cubo) o di qualunque altra, perchè penſi, che

(1) Serve queſta curva per determinare (Milliet De-Chales *Geom. Pract.* lib. III. prop. 31.) riſpetto a' due dati eſtremi la poſizione d'una retta eguale ad una data, e menata da un dato punto; per mezzo della quale ſi viene poi al conſeguimento di due medie continue proporzionali. Ma come parmi, che l'applicazione, che ſi fa della Ciſſoide a queſto medeſimo effetto, ſia molto più breve, e l' operazione meno implicata; così quando occorreſſe la duplicazione del cubo, meglio ſia attenerſi a queſta, la quale ricordaremo a ſuo luogo, come ſi metta in pratica.

che essa sia meno altrui nota, ma perchè ciò è troppo per venirmi in acconcio, quando passarò a provare la struttura degl' Istromenti annessi.

Sìa però (*Fig.* 1. *Tav.* 1.) perpendicolare alla *direttrice* indeterminata DR la retta PC *costante* data, dal cui estremo punto P, che dicesi *polo*, sono tirate molte parimente indeterminate P*t*, P*t* ec. secanti detta *direttrice*. Di queste col compasso si recidano altrettante quantità, che *intercette* appellansi, eguali ad una data, o al di sopra della *direttrice*, quali sono *pt*, *pt*, ec., o al di sotto, come *tn*, *tn* ec., ovvero *tr*, *tr* ec. *to*, *to*, ec. Allora la linea LTZ condotta per i punti *p*, *p* ec. sarà una Concoide *esteriore*, e Concoidi *interiori* le tre linee GMH, BPE, KPQPS, la prima delle quali unisce i punti *n*, *n* ec., la seconda passa per i punti *r*, *r* ec., la terza per i punti *o*, *o* ec., corrispondenti appunto per ordine ai tre casi della Concoide *interiore*: primo, quando la *intercetta*, come *tn*, è minore della *costante* CP. Secondo, quando è eguale, come *tr*. Terzo, quando è maggiore, come *to*.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione scenografica dell' istromento per la Concoide.

OLtre che io mi recai a noja lo spiegare in disegno il *piano orizzontale*, e *verticale* di questa macchinetta, parvemi ancora che la sua perfetta costruzione si potesse raccogliere assai bene dalla sola elevazione in prospettiva. Di che per convincersi figuriamoci, che alla tavoletta orizzonle BEFK (*Fig.* 2.) sia fermato con due viti NN un telaro DMQR composto di un pezzo DR, nelle due estremità del quale sono eretti due stanti DM, RQ, che sostengono un altro pezzo MQ. Il pezzo DR è un parallelepipedo di legno o di metallo, solcato per il lungo da una scannellatura

tura

tura di tal forma, che nell' interiore sua cavità ricever possa il prisma *pt* della *Fig.* 3., e combaciate al di dentro con l'esteriore superficie di detto prisma. Laonde questo prisma *pt* fornito di un pivolo *t* al di sopra, già figuriamolo inserto e mobile per essa scannellatura nella direzione DR; cosicchè il pivolo *t* annesso tracci una linea retta, che rappresenti la *direttrice* DR della *Fig.* 1.; ma per ora via si tolga (*Fig.* 3.) il raggio *t*K, che quanto prima ad altre curve sia d'uopo.

Nelle due estremità del parallelepipedo DR sono, come già dissi, eretti due stanti RQ, DM, ai quali pure sta in alto afferrato un altro parallelepipedo MQ, il di cui piano verticale apparente in figura perpendicolarmente sovrasta alla linea detta di sopra, che per il lungo della scannellatura DR si concepisce esser tracciata dallo scorrente pivolo *t*. Nel mezzo di questo parallelepipedo avvi per di sotto un incastro di quella forma, che è l'asta PH in esso introdotta ad angoli retti, e che si ferma in qual punto più si vuole con una vite superiore C. Dall'estremo punto P di quest'asta discende perpendicolarmente un palicello d'acciajo PZ quale, come meglio osservaremo in sezione, poichè è entrato nella scannellatura del regolo AG, dilatandosi in cerchio, riempie il largo di quella cavità. La distanza poi PC presa in detta asta da P fino all'incontro del piano verticale MQ, secondo che più o meno si caccia innanzi, sostiene le veci d'ogni *costante* data, ed il palicello PZ sta in luogo di *polo*.

Il regolo AG circa la metà di sua lunghezza ha un forame verticale, in cui per di sotto (interposta prima una laminetta rotonda perforata, come nella *Fig.* 5., e grossa quanto il raggio *t*K della *Fig.* 3.) entra il pivolo *t*, e quindi parte una scannellatura verso A, in cui s'introduce, come si è detto, il palicello d'acciajo PZ. E' poi circondato da due anelli rettangoli forniti ciaschedu-

no di uno ſtilo S, onde la curva ſi deſcrive; ma l'anello a ſiniſtra preſſo *n* in luogo d'abbracciare perfettamente detto regolo, come prima va a baciare il margine della ſcannellatura rimane interrotto, e laſcia paſſaggio libero al palicello PZ: lo che, diſſi, aſſai più chiaramente ſi dà a vedere in ſezione (*Fig.* 4.) dove il parallelogrammo A*n* per ombra diſtinto rappreſenta l'anello A*n* della *Fig.* 2. coll'anneſſo grafio S, e con la vite *d*, onde ſi fermi in quel punto, che più piace; il ſeguente parallelogrammo da quello circoſcritto, e che tiene tuttavia la bianchezza della carta, rappreſenta un taglio del regolo AG fatto per traverſo; e finalmente l'intimo PZ da queſto bianco racchiuſo ſignifica il palicello PZ della *Fig.* 2. che ſi dilata e riempie detta bianca cavità.

Lo ſpazio *t*A preſo ſu detto regolo AG, a qualunque data *intercetta* ſi può eguagliare, ſoſpingendo li anelli, e fermandoli in data diſtanza con le opportune viti. Avvertendo per fine, che tanto ſiano lunghi li ſtili e palicello PZ, quanto fa di meſtieri, acciò i *piani orizzontali* dei parallelepipedi, aſta, e regolo ſiano tra di loro ed all'orizzonte paralleli.

Ciò fatto qualora ſia data qualunque *interiore* o *eſteriore* Concoide da deſcriverſi, preparata prima, come ſi è detto, la macchinetta, niente più importa, che con la deſtra dar moto al regolo AG, acciocchè movendoſi in *t* nella direzione DR, e ſtriſciando nello ſteſſo tempo d'intorno al palicello PZ, dalli ſtili S overo *ſ* vengan deſcritte le propoſte curve, vale a dire, dallo ſtilo *ſ* la Concoide *eſteriore*, e dallo ſtilo S l'*interiore*.

AR-

ARTICOLO TERZO.

Origine e descrizione organica della Concoide della Contessa Agnesi.

NOn è da tralasciare, che la Concoide KPQPS (*Fig.* 1.) che la celebre Contessa Maria Gaetani Agnesi (1) produsse nelle sue *Instituzioni Analitiche*, non è stata, che si sappia, prima da altri conosciuta. Essa si avvolge in nodo, e nel *polo* P si interseca e risulta, come già dissi, dall' essere le intercette *to*, *to* ec. più lunghe della data *costante* CP, della quantità PQ. Onde per descriverla si dovrà far di modo, che la distanza *t*A (*Fig.* 2.) sia maggiore della CP, come appunto si ritrova a caso nella presente figura.

ARTICOLO QUARTO.

Origine delle Concoidi di base circolare.

CErta cosa è presso tutti i Matematici, che la linea retta aver si può come porzione della periferia di un circolo infinito; onde ne segue, che le Concoidi di Nicomede, che hanno per base o sia *direttrice* una retta, han per base o *direttrice* una porzione della periferia di un circolo infinito; e sono caso particolare, e dipendente da un generale, nel quale le Concoidi nascono da base, che sia un circolo finito. Dopo aver dunque detto di quelle ormai vecchie nella memoria degli uomini passeremo ad esporre l'origine e descrizione organica di queste, che, se mal non penso, non furono note per lo innanzi.

Pertanto se per i punti (*Fig.* 1. *Tav.* 2.) della perife-
ria

(1) *Instit. Analit.* Lib. I. cap. 5. probl. 4.

ria TT*tt* ec. e per il *polo* R ſi tirino molte rette indeterminate PTNRN, PTNRN ec. ed in queſte col compaſſo ſiano definite le *intercette* eguali ad una data, o al di ſopra della *direttrice*, come ſono TP, TP, *tp*, *tp* ec., o al di ſotto come TN, TN, *tn*, *tn* ec. la linea ſcorrente per i punti PP *pp* ec. ſarà una Concoide *eſteriore* ed *interiori* quelle, che uniranno i punti NN *nn*, NN *nn*, le quali tutte è da notare, che avranno l'aſſe eguale al diametro del *circolo generatore*, o ſia periferia *direttrice*.

Due cagioni poi concorrono a modificare la forma apparente delle Concoidi di queſto genere. Prima, perchè le *intercette* TP, TP, *tp*, *tp* ec. o ſia TN, TN, *tn*, *tn* ec., ovvero (*Fig.* 2.) TO, TO, *to*, *to* ec. ſono pareggiabili ad ogni data; onde le Concoidi *interiori* ora accadono tra il *polo*, e la periferia *direttrice* dentro l'angolo *t*R*t*; ora al di qua del *polo* compreſe nell'angolo al vertice oppoſto *a*R *a*; talora ſono eguali e dal *polo* egualmente diſtanti, come NN *nn* ec., NN *nn* ec., ma ſempre per il vertice oppoſte; e talora parte di una medeſima Concoide, come OO ec. (*Fig.* 2.) ſta ſituata di qua, e parte *oo* di là dal *polo*, coſicchè preciſamente nel punto polare R ſe ſteſſa interſeca, formando due ſeni, che eſſer poſſono eguali, o l'uno dell'altro maggiore, o minore; e in queſto caſo la Concoide OOR, *oo* ec. è analoga a quella della Conteſſa Agneſi celebrata di ſopra; perchè parte delle *intercette*, come TO, TO metton capo tra il *polo* R, e la periferia *direttrice* ſotto l'angolo *t*R*t*, e parte come *to*, *to* cadono nell'apertuta dell'angolo oppoſto *o*R*o*. In ſecondo luogo variano dette Concoidi, perchè la diſtanza, che è dal *polo* R al *centro* C della periferia *direttrice*, può parimenti eguagliarſi ad una *coſtante* data, quale ſe ſi ſupponga infinita, e però nell'infinito andato anche il *polo*, le indeterminate dovendoſi in tal caſo conſiderare a ſe ſteſſe parallele, le *intercette* poi non potrebbero altra curva fornire, che una periferia.

riferia eguale affatto alla periferia *direttrice*. Ma se il *polo* è situato di qua dall' infinito (prescindendo per ora dalla lunghezza delle *intercette*) più o meno acuto risulta il vertice della curva, secondo che più o meno essendo distante il *polo* della periferia *direttrice*, risulta l'angolo al *polo* di maggiore o minore apertura. Onde è qui da notare ciò che aggradiranno per avventura i Meccanici, ed è, che se la *costante* CR sarà eguale a otto diametri incirca del circolo generatore, e le *intercette* a tre, ovvero $13\frac{1}{2}$ incirca, ne verrà una curva (*Fig.* 3.) o tra il *polo*, e la periferia per il primo caso, cioè se le *intercette* saranno eguali a tre diametri del circolo generatore; o di qua dal *polo* per il secondo caso, cioè se dette *intercette* saranno eguali a $13\frac{1}{2}$ diametri di detto circolo, la quale gentilmente rappresentarà una sezione di uovo, di cui spesso può occorrerne l'uso, per fare di una simil forma o quadri di pittura, o cornici, o che altro so io.

ARTICOLO QUINTO.

Descrizione organica delle Concoidi di base circolare.

LA descrizione organica di questo genere di Concoidi si riduce felicemente alla macchinetta di sopra esposta. Primieramente sol basta condurre il prisma *pt* (che già s' intende essere dentro la scannellatura dal parallelepipedo DR) nella giusta metà di essa, cosicchè il pivolo *t* soggiaccia verticalmente a quel punto del piano verticale MQ, in cui va a urtare la linea PC. Si fermi poi in detto punto il prisma con la vite *q* situata nel fianco del parallelepipedo, giacchè resta per queste Concoidi inutile affatto la scannellatura DR. Indi levata dal pivolo *t* la laminetta espressa nella

Fig.

Fig. 5., bisogna mettervi in suo luogo il raggio *t*K della *Fig.* 3., e far entrare (*Fig.* 2.) nel forame *t* del regolo AG non già il pivolo *t*, ma la estremità K uncinata di detto raggio *t*K. Per altro tanto le *intercette* TP, TN, TO della *Fig.* 1. *e* 2. *Tav.* 2., quanto la *costante* CR a qualunque data si eguagliano, prendendo rispettivamente quelle nel regolo AG (*Fig.* 2. *Tav.* 1.) e facendo *ta*, ovvero *t*A eguale a dette *intercette*, e questa nell' asta PH, facendo CP eguale alla data *costante* CR della *Tav.* 2., non altrimenti che se si trattasse di preparare la macchinetta alla descrizione delle Concoidi di Nicomede, cosicchè il pivolo *t* vaglia per il centro C della *Fig.* 1. *e* 2. *Tav.* 2., ed il palicello PZ per il *polo* R di dette figure. E per ciò che riguarda il moto di detta macchinetta, dove per le Concoidi di Nicomede il forame *t* del regolo AG era mosso nella direzione DR, ora per questa sarà con la mano spinto per un cerchio, il di cui raggio sia *t*K della *Fig.* 3. *Tav.* 1. Notando che quantunque detto raggio *t*K sia sempre il medesimo, perchè però si può modificare ad arbitrio l'asta PH, che fa, come dissi, per la data *costante* CR, si ponno nondimeno conseguire infinite Concoidi di questo genere di base circolare.

Qui però io non voglio dissimulare una difficoltà, che da' Meccanici potrebbe venir fatta in proposito della descrizione da me loro promessa della sezione di un uovo; perchè intorno a picciole sezioni, qual' è quella della *Fig.* 3. *Tav.* 2., non v'è che ridire, ma se ad un quadro o cornice si dovesse dare la forma di una tal curva, di cui l'asse maggiore *ab* fusse (che poi non sarebbe gran fatto) lungo cinque soli piedi di Parigi, ne seguirebbe che sebbene accadesse la descrizione tra il *polo* e la periferia *direttrice* (supponendo le *intercette* eguali a' tre diametri di detta periferia) nonostante, essendo stata supposta la *costante* CR eguale ad otto diametri della periferia medesima, la porzione PC dell' asta PH della *Fig.* 2. *Tav.* 1. verrebbe per lo meno ad

essere

essere lunga 40. piedi di Parigi. Perchè essendo l'asse dato di piedi cinque, di cinque piedi parimenti sarebbe il diametro del circolo generatore, che, come abbiam detto, all' asse della curva si eguaglia; ma la data *costante* CR, ovvero CP, cui si suppone eguale, si suppone dover essere eguale a otto diametri incirca del circolo generatore; e perciò moltiplicato 8 per 5, la lunghezza della data CR, ovvero CP ascenderebbe certamente fino a 40. piedi di Parigi. Onde chi non vede essere la bottega di un Artefice angusta troppo per una macchina tanto enorme? Pure io son per farmi incontro a questa obbiezione, non già con animo di risolverla, ma col tentare di procacciar loro questa comodità per altra via. E però oltre che assai bene riesca una simil curva dall' accozzamento di un semicircolo ***mbn*** con un semielisse ***man*** (*Fig.* 3. *Tav.* 2.) di cui l'asse minore ***mn*** sia eguale, e coincida col diametro di quello, spiegarò inoltre a suo luogo (1) come conseguir anche si possa con l'uso di un semplice filo; metodo, per vero dire, di cui nell' opinione degli Artefici non v'ha il più utile, nè il più facile. Ma per ora basti della descrizione ed uso di questo primo Istromento.

(1) Istrom. VI. Art. III. e IV.

ISTROMENTO II.

PER LA CISSOIDE DI DIOCLE, E PER LA CURVA DI M.[r] CARRE'.

COſpirarono ad un medeſimo fine le invenzioni di Nicomede, e di Diocle, poichè quello la Concoide, e queſto la Ciſſoide inventarono per la duplicazione geometrica del cubo (1); ma eſſendo che per queſta non che gli antichi Filoſofi indarno travagliarono, ma ancora i moderni vanamente v' impiegarono le forze del loro ingegno, noi contenti di più umili ricerche, dappoichè abbiam detto della Concoide, paſſeremo ſoltanto a ſpiegare l' origine e deſcrizione organica della Ciſſoide.

ARTICOLO PRIMO.

Dell' origine della Ciſſoide.

SIa dunque (*Fig.* 1. *Tav.* 3.) la retta QO tangente il *ſemicircolo generatore*, e poſta ad angoli retti del diametro

(1) Voglio dire per trovare due medie proporzionali. Conciossiacchè quando foſſe propoſto di trovar due medie continue proporzionali x, z tra due dati eſtremi A, B ſi ſegni, (*Fig.*1. *Tav.*3.) ſul diametro QP la QI = alla data A; e da I ſi meni la perpendicolare Iu = alla data B. Poi dal punto Q per u occorra nella già deſcritta curva PZ la retta QZ; e ſi faccia A ad x, come QL ad Lm; e come mL ad LP, così x a z, perchè le rette x, z che ne verranno, ſaranno le due medie cercate.

Il P. Milliet (*Geom. Prat.* Lib. III. Prop. 28.) facilmente dimoſtra, che tirato per qualunque punto z della Ciſſoide la mL perpendicolare al diametro PQ riſulta ∺ QL . Lm . LP . LZ. Ma QI ſta ad Iu, come QL ad LZ; ed è QL ad LZ in ragion triplicata di QL ad Lm, cioè in ragion triplicata di A ad x; così pure QI ad Iu in ragion triplicata della medeſima A ad x, ed anche di x a Z. Dunque le rette xZ ſono medie continue proporzionali tra QI ed Iu, cioè tra A e B. Ciò che era a dimoſtrarſi.

Quando perciò di queſti quattro termini ∺ A . x . z . B ſi ſupponeſſe che A foſſe doppio di B, il cubo eretto ſulla Z ſarebbe (come già ſi ſa) doppio del cubo eretto ſulla B; ed il gran Problema riſolto.

metro Q P, e ſiano dal punto eſtremo P alla tangente condotte molte rette P*b*, P*d*, P*f* ec. delle quali le porzioni *ab*, *cd*, *ef* ec. compreſe tra la periferia del ſemicircolo, e la tangente ſiano col compaſſo traſferite dall'altra parte ſulle medeſime linee riſpettivamente; cosìcchè facendo ſempre capo in P, ſiano P*t* = *ab*, P*r* = *cd*, P*z* = *ef* ec. Allora la linea ſcorrente per i punti P, *t*, *r*, *z*, *y* ſarà la propoſta Ciſſoide.

ARTICOLO SECONDO.

Deſcrizione organica della Ciſſoide.

L' Iſtromento preparato (*Fig.* 2.) alla deſcrizione organica di queſta curva nella ſimplicità e geometrica eleganza va, ſe non erro, del pari con quelli che per le ſezioni coniche, o altre curve ſi inventarono. Egli conſiſte primieramente in una tavoletta LNP, il di cui margine LCP ſoſtiene le veci del diametro del circolo generatore PQ, quale appunto s'intende eſſere ad eſſo margine eguale, e meſſo per dritto con tutto il rimanente della *Fig.* 1. quivi poſta a lato. Ad angoli retti poi di detto margine, o ſia diametro LCP ſta afferrato alla tavoletta un regolo PG, ch'è invece della tangente QO, e ad eſſa parallelo incavato per il lungo di una ſcannellatura, non altrimenti che il parallelepipedo DR della *Fig.* 2. *Tav.* 1., ed in eſſo altresì ſcorre un priſma fornito al di ſopra di un pivolo D. Due altri pivoli P ed L ſtanno pure fiſſi nei due eſtremi del margine, o ſia diametro LCP. Un altro pivolo ancora è poſto in C, intorno a cui ſi muove l'aſta CR, che ſta per raggio del ſemicircolo PRL al generatore eguale, e che incurvandoſi nella eſtremità R, s'introduce ed abbraccia i lati feſſi di due norme indeterminate ADB, FPE, la prima delle quali gira d'intorno al pivolo fiſſo nel priſma D, e riceve nel feſſo lato AD il pivolo L, oltre il detto raggio

 unci-

uncinato CR. L'altra poi è mobile d'intorno al pivolo P, ed un lato PF, come dissi, si attiene parimenti all'introdotto uncinato raggio CR, e nell'altro FE ha un anello scorrente fatto come in sezione ζ fornito di uno stilo, che s'insinua nella fessura del lato della prima norma ADB, e quindi perpendicolarmente discende sul piano della carta. Ora fermata al detto piano con la sinistra la tavoletta LNP, e situate prima le parti in guisa tale, che CR coincida per quanto sia possibile con CP, DL con PL, PF con PG, PE con PQ, ed i punti RDS siano uniti tutti nel punto P; traendo poi con la destra il pivolo D con lo scorrente prisma verso G, dallo stilo S del lato BD della norma ADB sospinto, verrà descritta la proposta curva. Della quale alcuni soli punti mancaranno in P, perchè ivi non può darsi in pratica un preciso concorso dell'uncino R, pivolo D, e stilo S; difetto che sarebbe considerabile, se anche ad altre macchinette inventate da' più celebri uomini (1) non fosse comune. E molto più se (ciò che non è) rendesse inutile la curva in quell' uficio, cui è stata destinata.

Per verificare poi la prefata costruzione per rapporto all'origine della curva, dimostrarò essere P*e* costantemente eguale ad SH. Imperciocchè dovendo in qualunque posizione l'angolo LRP esser retto, retto del pari sia l'angolo PRD, e così essendo gli angoli ai punti P, D per supposizione retti, retto pure sarà l'angolo PSD, e quindi sarà PRDS un parallelogrammo, e però il lato PR parallelo è eguale al lato SD, ed il lato RD costantemente parallelo ed eguale al lato PS. Ma essendo LP posto in diretto con PQ, la retta QL cadendo sopra le parallele ESP, DRL, fa l'angolo esterno EPQ eguale all' interno PLD, e quindi gli archi Q*e*, PR, dalla metà de' quali vengono mi-

(1) Le macchinette di Francesco Schooten composte col filo per le sezioni coniche soggiacciono al medesimo difetto.

ſurati, appartenendo a' cerchj eguali, ſaranno parimente tra loro eguali.

Inoltre perchè ne' due triangoli PLD, QPH gli angoli PLD, QPM ſono ſtati moſtrati eguali, e gli angoli in P, Q ſono per ſuppoſizione retti, e per ſuppoſizione pure il lato LP è eguale al lato PQ, ſarà anche il lato PD al lato QH eguale.

Quindi ne' due triangoli miſti RPD, *e*QH i lati PR, PD dell'uno ſaranno eguali ai lati corriſpondenti Q*e*, QH dell' altro, ed eſſendo gli angoli RPD, *e*QH da eſſi compreſi eguali, per eſſer angoli che fanno le tangenti PD, QH cogli archi riſpettivi PR, Q*e* di cerchj eguali, ſarà anche la baſe RD d'un triangolo miſto eguale alla baſe *e*H dell' altro; ma RD ſi è moſtrato eguale a PS; ſarà dunque PS ſempre eguale ad *e*H. E togliendo ad ambedue la porzione comune *e*S, reſtarà P*e*=SH. Ciò che era da provarſi.

ARTICOLO TERZO.

Deſcrizione organica della Curva di M.r Carrè.

SE poi tolte via dall' Iſtromento le parti inutili, ſi componga la norma ERF in quella ſituazione, che dimoſtra la *Fig.* 3. e che con la vite *z* ſi fermi l'anello con l'anneſſo ſtilo, qualora RS ſia eguale a PL, movendo il raggio CR, e ritenendo ferma con la mano la tavoletta LNP, riſultarà la deſcrizione della Curva di M.r Carrè (1) celebra-

(1) *Memoires de l'Academie. An.* 1705. *pag.* 56. Ivi il teſto Franceſe dà a veder chiaro, che la curva deſcritta dall'Iſtromento è appunto quella di M.r Carrè. Perchè (mutate le ſole lettere del teſto in quelle della mia figura) ſi eſprime così: *Soit décrit le demicercle* PRL; *ſi l'on ſuppoſe que ſon diamètre* PL *ſe meuve ſur le point* L, *tandis que l'extremitè* P *parcourt la demi-circonference* PRL, *il eſt viſible que l'autre extremitè de ce diamètre decrira dans ce mouvement une courbe* LSD, *qui à pour axe la ligne* LD=PL. E però anche l'equazione viene ad eſſere la medeſima, che ivi ſe gli aſſegna: cioè che S*n*=RL−L*m*.

brata nelle memorie dell' Accademia , e la di cui origine non espongo, come quella che dal necessario moto dell'Istromento si mostra chiaramente.

Di più , se levato via il raggio CR (*Fig.* 2.) e la norma FPE, e nelle braccia dell'altra norma ADB fusse introdotto, e fermato in qualunque sito *m*, ovvero *x* l'anello con lo stilo S, mentre il pivolo D fusse condotto da P verso G lungo il regolo PG, il punto *m* descriverebbe una Concoide *interiore*, ed il punto *x* una *esteriore*; delle quali sarebbero LP la data *costante*, L il *polo*, PG la *direttrice*, D*m*, D*x* le *intercette*; potendosi generalmente prendere in considerazione un qualunque altro punto del circolo *gxmq*, di cui il diametro *gm* prodotto sempre passi per il *polo* L, mentre il centro D sia guidato per la base PG: perchè qualunque sito D acquisti il centro D partito da P verso G, primo le intercette D*x* (giacchè sull' intercetta D*m* non cade quistione , essendo il caso semplicissimo della Concoide *interiore* di Nicomede) tra la Curva, e la *direttrice*, benchè costituenti con l'indeterminata LD un angolo dato LD*x*, restano anche in questo caso tuttavia eguali. Secondo, è da concepire che in principio di moto, quando D era in P, *q*D*x* era posto in diretto con GP prodotto; ed *m*D*g* con LPQ coincideva . Onde sospinto poi D verso G, la differenza dell' angolo d'inclinazione , che le intercette per esempio D*x*, D*g* fanno di mano in mano con la *direttrice* PG, è sempre la medesima quantità *o*D*q* passata di sotto della *direttrice*; e ciò così rispetto al punto *g*, che prima in P faceva un angolo retto con detta *direttrice*, come rispetto al punto *x*, che con essa *direttrice* formava due angoli parimente retti, e rispetto a qualunque altro punto, che fosse preso su detta circonferenza *g*,*x*,*m*,*q*. E quindi si può dedurre una proprietà molto semplice e comune a qualunque punto preso su detta periferia *g*,*x*,*m*,*q*, qual è, che il rettangolo della porzione di base PD moltiplicata nell' intercetta, sarà sempre eguale al rettangolo della porzio-

ne

ne dell' indeterminata LD moltiplicata in oq, seno della differenza oDq di detto angolo d'inclinazione qualunque dato. Perchè (tirate le perpendicolari gr, qo prodotta in y) i triangoli gDr, LDP sono simili; ma sono pur simili gDr, yDo; e per esser Do perpendicolare ad yq, e l'angolo gDq retto, sono simili anche i triangoli yDo, Dqo, e quindi simili gDr, Dqo; e per conseguenza simili LDP, Dqo. Onde DL. DP :: Dq . qo. Dunque per fine $PD \times Dq = LD \times oq$. Ciò che era a dimostrare.

Io avrei potuto di leggiero, modificando la mia prima macchinetta, renderla atta a descrivere anche tutte queste *Concoidi*, se non tanto l'inutilità e facilità del progetto, quanto la difficoltà di poterla dare poi ad intendere in disegno con eguale nettezza, non me ne avesse distolto.

ARTICOLO QUARTO.

Quali Curve si convenga descrivere con un medesimo Istromento.

PRegiando io al sommo il giudicio di un Uomo preclaro tra i più illustri di questa nostra età, ho motivo non piccolo di dubitare, che donando egli forse, quando che sia, qualche riflesso alla costruzione del predetto Istromento, trovi che opporvi, massimamente avendo altra volta dimostrato in questa parte l'animo suo dicendo: (1) *Instrumenta . . . . . . non alia facile recipienda esse . . . . præterquam illa, quorum unumquodlibet lineas infinitas generis ejusdem describere queat.* Ma appunto questo giudicio di lui quanto più da me venerato, altrettanto mi conforta a produrre il mio parere. Sembrami dunque, che, rettamente esaminando, abbiasi a distinguere, se le Curve, che intrapprendiamo a descrivere, siano di tal genere, che non v'abbia altra differenza tra l'una e l'altra, che di maggiore o minor

(1) Poleni in Epist. ad Jacobum Hermannum.

nor grandezza, come la *Cissoide*, il *Circolo*, la *Cicloide*, che sono mutabili soltanto secondo il più ed il meno, immutabile restando la loro simmetria; o siano pur di tal sorta, che non solo siano alterabili secondo il più ed il meno, ma in varie e nuove guise spiegandosi, e flessi e regressi variando, all'occhio d'esse più non appajano, quantunque lo sieno, e per tali vengano dall'equazione accusate. Il che avviene delle *Concoidi*, mentre per la forma apparente le *esteriori* alle *interiori* non s'assomigliano nè le prime, nè le seconde a quella della Contessa Agnesi. E però dico, che si debbano descrivere con un solo Istromento infinite Curve d'un istesso genere di quest'ultima razza, perchè così veggasi la Curva trasformarsi, e passare per tutti li stati suoi quasi per gradi. Intorno poi a quelle di tal genere, che altra alterazione non patiscono, che di maggiore o minor estensione, distinguo di nuovo: O elleno tornano frequentemente in uso agli uomini, come il *circolo*, l'*elisse*; o sono per questo capo tuttavia inutili, come la *catenaria*, e simili. Nel primo caso parmi, che costruendo l'istromento si debba aver riguardo ad infinite grandezze di un medesimo o *circolo*, o *elisse*, o altre tali, intendendo però il termine d'infinito per il suo dritto. Nel secondo della *catenaria*, e simili, stimo certamente soverchio, che un prudente inventore indirizzi a tale scopo le sue meditazioni; sì perchè manca una certa utilità, che lo persuada, sì anche perchè questi tali Istromenti non ad altro occupano i tavolini de' Geometri, che per tosto fornir loro una curva, qualora per avventura solleciti di una bella figura, che dovesse incidersi in rame, o usare in qualche dimostrazione, vogliono sottrarsi al tedio di un più lungo metodo. Per altro era facile a me il render capaci di modificazione le distanze CR, CP, CL (*Fig.* 2. *Tav.* 3.) per conseguire *Cissoidi* infinite, le une maggiori dell' altre, quando avessi giudicato, che altri non avessero saputo farlo da se, siccome mi son ingegnato di fare per la descrizione organi-

ca

ca della *Cicloide*, conformandomi appunto al piacere del sopra celebrato Autore per le ragioni addotte. Ma sia per ora fatto fine a questo ragionamento.

ISTROMENTO III.

PER LA LINEA QUADRATRICE.

E' Sempre stato, e credo che mai sempre sarà un arcano profondissimo della Geometria l'arte di dividere colla sola riga, e compasso un angolo qualunque in tante date parti, e specialmente in tre; così pure la maniera di quadrare l'area di un circolo dato. Perciò sin da più alti secoli si è investigata la ragione, che passa tra il raggio e la periferia, come quella che avrebbe potuto condurci allo scoprimento dell'uno e dell'altro mistero. Dinostrato fissando l'animo a questo doppio scopo inventò la sua linea *Quadratrice*, la quale se si potesse descrivere geometricamente, manifestando la suddetta ragione, sciorrebbe li due (1) celebri problemi; ma

C non

(1) Per mostrare come questa curva soddisfi alla prima intenzione dell' Autore, che è la trisezione dell'angolo, supponiamo per esempio (*Fig.* 3. *Tav.* 2.), che sia proposto l'angolo MCD da dividere in tre parti date. Onde dal punto S, in cui il raggio CD s'interseca con la curva MSBH (che già si vuol supporre descritta) sia condotta una SP perpendicolare al lato MC. Di poi si divida geometricamente, come far si può, la retta MP nelle tre date parti, dalle quali tirate altrettante parallele a PS, per li punti, dove queste tagliano la curva, si menino tre raggi dal centro C, li quali divideranno l'angolo MCD nelle tre parti date.

Circa poi al secondo progetto, che è la quadratura del circolo, quando geometricamente si desse, come in vero non si dà, la precisa situazione del punto estremo H; e che CH *base*, come si dice della *Quadratrice*, fosse rigorosamente data, mostrando Apollonio, ed il P. Milliet (*Lib.* 2. *De Indivis. pro.* 4. *de Quadratrice linea*) che ∺ CH. CQ. QM circonferenza del quadrante, dati i primi termini CH, CQ, si conseguirebbe anche il terzo QM. Onde poichè si sa, che l'area d'un circolo è eguale ad un triangolo, di cui sia base la circonferenza, ed altezza il raggio; ovvero eguale ad un rettangolo, del quale un lato sia detta circonferenza, e l'altro lato la metà del raggio, l'area di un quadrato eretto sopra una retta media proporzionale tra la circonferenza data per mezzo della *Quadratrice*, ed il raggio, sarebbe eguale all'intiera area del circolo dato.

non potendosi ciò così conseguire, tenteremo almeno di delinearla per mezzo d'un Istromento.

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Quadratrice, e sua descrizione per punti.

PEr dare ad intendere l'origine di questa curva, descritto prima il quadrante MCQ (*Fig.* 4. *Tav.* 1.) figuriamci che il semidiametro MZ conservandosi sempre ad angoli retti del lato MC si porti con un moto equabile verso il lato CQ, ed ivi giunga a coincidere nello stesso tempo, che vi perviene, anche il raggio CM, il quale ruotando equabilmente intorno al centro C, scorre tutti i punti DFQ di detto quadrante. Imperocchè allora tutti i punti d'intersezione del lato MZ col ruotante raggio CM presi insieme forniranno una curva MSBH, che è la *Quadratrice* di Dinostrato, ma in rigore mancante dell'ultimo punto H, il quale, ivi non seguendo più intersezione, si perde.

Si manifesta questa tale origine anche dalla descrizione per punti della medesima curva. Imperocchè diviso prima il lato CM in quante più si può parti eguali MP, PG, GC ec., e l'arco MDFQ in altrettante, conducendo poi ad angoli retti del lato CM le ordinare MZ, PS, GB ec. ed alla circonferenza li raggi CM, CD, CF, li punti d'intersezione MSB ec. saranno elementi della *Quadratrice*, che intraprendo ora a descrivere col seguente Istromento.

AR-

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Quadratice.

IL P. Milliet (1) si lusinga, che la descrizione organica di questa curva sia facile, ma la prova mi fa accorto del contrario. Non ostante qualunque siasi, propongo la presente, e m'immagino che KAEN sia (*Fig.* 5. *Tav.* 2.) un telaro, di cui nel lato NE scorra la guida ZO connessa ad angoli retti col fesso regolo *o*P. D'intorno poi ad un pivolo C fisso nel lato AK movasi un quadrante C*ax*, di cui il raggio *x*C prolungato sia verso D, e fesso esso pure in una parte di sua lunghezza, e corredato di una guida S fermata ad uno stilo, il quale passando per le fessure del raggio *x*C prolungato, e del regolo *o*P, discenda sul piano a descrivere la curva.

Sia inoltre alla guida ZO attaccato un filo o catenella, la quale piegandosi indi d'intorno alla carrucola E vada per fine a congiungersi col quadrante suddetto nel punto *x*. Si rilevi poi la circonferenza del quadrante *ax* col farlo girare da Q verso Z, come per descrivere un quarto di *Cicloide*; e si rimova il punto O da Q verso Z uno spazio QZ eguale alla suddetta circonferenza *ax*. Cosicchè in principio di moto PO coincida con MZ; il lato *x*CD del quadrante con CM; ed il lato *ca* con CQ; e la catenella sia in questa prima situazione tangente in *x*. Perchè poi con la mano posta nella sommità D fatto volgere da M il regolo CD a destra fino in Q, avvertà che giungendo CD a coïncidere con CQ, pervenga C*a* nella direzione CM, e la catenella diventi tangente a detto quadrante in *a*. Essendosi tanta quantità di essa avvolta sulla circonferenza del quadrante, quanta si è ritirata da Z fino a Q; giacchè per la costruzione QZ=*ax*; e però anche il regolo P*o* verrà tirato nel medesimo tem-

(1) Lib. II. *De indivisib.* prop. 1. *Descriptio lineæ Quadratricis.*

po, mantenendosi sempre verticale ad MC fino in CQ; e lo stilo S dalli due regoli CD, oP determinato alla descrizione della suddetta curva.

Questo Meccanismo (accresciuto di una correzione omessa a bella posta, ma necessaria per non perdere (*Fig.* 4.) i primi punti della curva in M, nè gli ultimi in C di un' altra curva MrC) regge sicuramente per conseguire una sola *Quadratrice*, di cui il lato ZQ, cioè MC sia eguale (*Fig.* 5.) ad *ax* circonferenza costante del quadrante. Ma per soddisfare intieramente al Problema, e molto più perchè questa curva entrarebbe nel numero delle curve utili, sarebbe stato mestieri, che, potendo modificare a piacere la circonferenza del quadrante *ax*, l'Istromento descrivesse una *Quadratrice* di un lato MC qualunque dato; il che non è così facile, come pare al P. Milliet. Tuttavia se si supponesse che il quadrante C*ax* fusse la base di un quarto di cono, di cui il vertice andasse perpendicolarmente a cadere nel centro C, si potrebbero sulla sua superficie prendere anche quadranti di diverse grandezze; ordinando poi le parti dell'Istromento in modo, che la carrucola E, ed il punto d'attacco *o* si potessero portare a livello delle differenti altezze de' quadranti presi d'intorno alla superficie del cono eretto su detta base C*ax*.

Un' opposizione ancora potrebbesi fare a questa macchinetta, ed è, che si prende la ZQ eguale al perimetro *ax* del quadrante, che si mette in uso; dunque nella costruzione di questo Istromento si suppone quel che si cerca col beneficio della curva da descriversi. A che risponderei, che si cerca nell' atto di costruire l' Istromento, come nell' atto di fabbricare un compasso di proporzione si cercano le sue divisioni; ma quando si vuole adoperarlo, senza altro tentare non si ha che portare il punto *o* nel Z già determinato.

A dir vero però io era per questa opposizione in procinto di rigettare l' Istromento, come non soddisfacente al Proble-

ma

ma in modo perfetto. Ma nonostante dappoi un nuovo animo mi suggerì di pubblicarlo, avvisando cosa onde si scemi in parte l'opposizione suddetta, e porgasi al leggitore di che pascere l'avida sua mente con nuova scoperta. Trovo adunque (*Fig.* 4. *e* 5.) che la ragione di ZQ comparato ad ax si riduce a tre casi: cioè ZQ eguale ad ax; ZQ maggiore di ax; ZQ minore di ax. Quando $ZQ = ax$, il raggio percorre la periferia di tutto il quadrante MDFQ, mentre l'ordinata scorre per tutti i punti del lato MC, e nasce la MSBH *Quadratrice* di Dinostrato, che ha per base CH. Quando $ZQ > ax$, mentre il raggio CM percorrerebbe tutto il quadrante NDFQ, l'ordinata compisce, per esempio $\frac{2}{3}$ soli del lato MC, e nasce la curva M*m*F, la quale non può mai giungere a toccare il lato CQ, appunto perchè, non compiendo l'ordinata tutti tre i terzi del lato MC, non arriva nemmeno essa a coincidere con CQ; ma più che sarà maggiore lo spazio percorso da detta ordinata su detto lato MC, la piegatura della curva in F si farà maggiore e più vicina al punto H, dove così a poco a poco disponendosi, anderà a cadere, quando detta ordinata percorra tutto il detto lato MC, e la curva si trasformarà nella *Quadratrice* MSBH, mentre svanisce una parte di se confondendosi con la porzione HQ del lato CQ. Quando $ZQ < ax$, allora mentre il raggio CM percorre per esempio $\frac{2}{3}$ soli del quadrante MDFQ, l'ordinata compie intanto tutto lo spazio MC, e giunge a coincidere con CQ, e quindi deriva la curva M*r*C, la quale sempre tiene un' estremità nel centro C, e con una piegatura tanto più vicina al punto H, quant'è maggiore l'angolo MCF, si dispone a rimanere finalmente in H, trasformandosi essa pure nella *Quadratrice* suddetta MSBH, mentre svanisce una parte di se, perchè si combina, e si confonde colla porzione CG del medesimo lato CQ.

Ora

Ora questi due ultimi casi soggetti alla macchinetta sono casi particolari di un altro, che comprende anche quello della *Quadratrice* di Dinostrato, ed altri nove ancora, come qui appresso osservaremo, e che potrebbe in termini generali esser esposto così: Descrivere una curva formata dai punti d'interſezione del raggio CM moventesi equabilmente in un quadrante MDFQ intorno al centro C, e dell' ordinata MZ pure moventesi nel medesimo quadrante equabilmente, e sempre verticale ad alcuno dei quattro lati di esso quadrante. Quindi nel caso che tanto l'ordinata MZ, quanto il raggio CM si avvanzino verso la medesima metà CQ, si ponno immaginare, secondo la ragione delli spazj rispettivi percorsi equabilmante, moltissime curve; tutte però simili ad una delle tre MSBH, M*m*F, M*r*C, per mezzo delle quali si potrà sempre dividere in parti date un angolo dato, che non sia però maggior di quello, a cui sono opposte. La curva per esempio MSBH è opposta all'angolo retto MCH, e perciò vale a dividere in parti date qualunque angolo, che non sia maggiore di un retto. La Curva M*m*F ed anche la curva M*r*C essendo per supposizione opposte al medesimo angolo MCF vagliono a poter dividere in parti date un angolo, che non sia maggior del detto angolo MCF. In fatti supponiamo che sia proposto l'angolo MCF da dividere in due date parti per mezzo di ciascheduna delle tre curve suddette. Onde volendo primieramente adoprare la curva MSBH, si conduca dal punto B d' interſezione di detta curva, e del raggio CBF, che determina l'angolo MCF, si conduca, dissi, BG ad angoli retti del lato CM, indi dalla metà di GM si meni la perpendicolare PS, che il raggio CD condotto per S dividerà l'angolo MCF nelle due date parti. Secondo, così volendo far uso della curva M*m*F, tirata F*b* perpendicolare al lato MC, e dalla metà di *b*M condotta la verticale *dm*, avverrà che il medesimo raggio CD condotto per *m* dividerà l'angolo MCF in due date parti. Terzo, presa pure alle

alle mani la curva M*r*C, e dalla metà del lato CM condotta la perpendicolare *yr*, ancor qui l'istesso raggio C*b*, che passa per *r*, dividerà l'angolo proposto MCF in due parti date. Onde tutti i punti d'interſezione S, *m*, *r* dell' ordinate PS, *dm*, *yr* col perimetro delle curve corriſpondenti MSBH, M*m*F, M*r*C cadono nel medeſimo raggio CD, e il dato angolo MCF viene diviſo nelle due date parti per mezzo di qualunque delle tre curve propoſte.

Non ſo veramente ſe queſte due ultime curve abbiano una proprietà ſimile a quella, che tanto brilla nella *Quadratrice* di Dinoſtrato, cioè ſe, ſiccome in detta *Quadratrice* è ∺ CH. CQ. QM, così in quelle ſi poſſano fiſſare tre termini continui proporzionali, l'ultimo de' quali ſia una porzione della periferia di un circolo; ma io credo di no, perchè nella *Quadratrice* un termine della proporzione è la baſe CH, e abbiamo già oſſervato, che la curva M*m*F non ha baſe, perchè non giunge mai a toccare il lato CQ, così M*r*C non ha baſe, perchè va ſempre a reſtringerſi nel centro C. Nonoſtante io concludo in favore del mio Iſtromento, che quand'anche le curve nate dal non' eſſere QZ eguale ad *ax* non ſerviſſero a rilevare la circonferenza del quadrante MDFQ per quindi definire la quadratura del circolo, almeno però ſoddisfano alla triſezione dell'angolo, che fu uno dei progetti, cui Dinoſtrato preteſe di applicar la ſua celebre *Quadratrice*.

Finora, ſuppoſto il raggio CM ruotante da CM verſo CQ, mentre l'ordinata MZ ſi avanza verſo la medeſima metà CQ, abbiam diſtinti tre caſi; ma tre ſimili caſi ſi ponno immaginare nel caſo che (ſempre ruotando il raggio CM da CM verſo CQ) l'ordinata andaſſe da CQ verſo MZ; tre altri quando detta ordinata progrediſſe da CM verſo QZ; tre caſi pure quando detta ordinata partiſſe da QZ verſo CM; onde dodici curve riſultano corriſpondenti a queſti dodici caſi tutti compreſi nel caſo generale ſovra enunciato.

Di

Di tutte queste curve almeno sei sono descritte per mezzo della mia macchinetta. Imperocchè primieramente si è visto come si faccia uso di essa nel caso che ruotando il raggio CD (che fa per tutti i raggi) da CM verso CQ, l'ordinata poi (cioè il regolo P*o*, che fa per tutte le ordinate) proceda da MZ verso CQ. Ma quando detto regolo dovesse moversi da CQ verso MZ, la catenella passata su la carrucola E facciasi passare anche sopra un' altra carrucola N prima di fermarla a detto regolo P*o*; perchè allora mentre il raggio CD da CM girerà verso CQ, il regolo P*o* da CQ procederà verso MZ. Se poi la guida *o*Z col regolo P*o* annesso si trasporti nel lato del telaro KN, e la catenella passi sopra le due carrucole E, N; allora esso regolo movendo il raggio CD da CM verso CQ, si avanzerà da CM verso QZ. Se finalmente la catenella passerà sopra tutte tre le carrucole E, N, K, prima di essere attaccata al regolo PO, che si suppone ora scorrente nel lato KN, dico che procedendo il raggio CD tuttavia da CM verso CQ, il regolo si moverà da QZ verso CM.

Pare che queste curve, essendo ambedue i mobili generatori affetti di moto equabile, siano per avere fra esse un qualche comune rapporto, e ben sarebbe stato l'indagare le proprietà di ciascuna. Ma io lascio per ora da parte tali ricerche aliene in certo modo dal mio soggetto, acciocchè se gli aggrada, ne vadino in traccia quelli, che sono in materia d'ozio e in valore d'ingegno più di me felici.

Sarebbe qui il luogo ove riporre l'accennata *Spirale* d'Archimede, come quella che è nel numero delle curve antiche; ma si trova (1) altrove esposta per essere compresa negli usi di un altro Istromento.

ISTRO-

(1) Istromento IX. P. II. Artic. X.

ISTROMENTO IV.

PER LE SEZIONI CONICHE.

ARTICOLO UNICO.

Conobbero gli Antichi l'origine di queste mirabili curve nascenti dalla diversa sezione di un cono, e li Moderni le recarono a profitto, e non prima furono applicate alla *Catottrica*, *Diottrica*, *Prospettiva*, e in una parola all' *Ottica* tutta, non men che alla *Gnomonica*, e *Meccanica*, che diventarono le delizie de' Geometri più insigni; e però altri (1) dappoi trattarono della loro *descrizione per punti*, altri (2) della *Organica*. Ma tacendo della prima, che non entra se non per accidente nel mio instituto, circa alla seconda dico, che parecchi Istromenti furono inventati, e per quanto sia arrivato a mio lume, tre avvene per la *Parabola*, sei per l'*Iperbola*, dieci o dodici per l'*Elisse*, e per la medesima altri ancora, ma di minor pregio; perchè in molte arti occorrendo spesso la *descrizione organica* dell'*Elisse*, molti più chiari ingegni intorno a questa, che a verun' altra curva si occuparono. Ma per dire il vero quasi tutti questi Istromenti, quantunque affatto geometrici, in pratica però soggiacciono a molte incomodità e difetti, ai quali non si può facilmente trovare rimedio. Quindi è, che l'Istromento chiamato d'*Immitazione*, quantunque, anzichè parer geometrico, sia in vero troppo rozzo e volgare, perchè però per opinione anche d'altri (3) torna meglio di qualunque altro all' uso di un Professore,

D io

(1) Midorgio ha trattato diffusamente della *descrizione per punti* delle *Sezioni Coniche*.

(2) Francesco da Schooten della *descrizione Organica*. Ed altri ancora.

(3) Il P. Castel Traité LVI. *Descrip. General des Courbes*, dice: *Une methode organique, que je crois la meilleure des toutes pour décrir assez exactement toutes sortes de courbes, c'est celle de l'imitation. Prenez une lame* ec.

io ſopra tutti lo pregio. Laonde non ſarà forſe altrui diſcaro, che io qui ne rechi un ſimile per la deſcrizione delle tre curve ſuddette, quanto men conſiderabile da una parte, altrettanto più ſpedito dall'altra, più ſemplice e ſicuro. Sia dunque preparata una polita lamina d'argento, o altro metallo, in cui (*Fig.* 1. *Tav.* 5.) col metodo per punti ſi deſcriva diligentemente un' *Iperbola* HIL, una *Parabola* PRo, ed un' *Eliſſe* ABMN. Dipoi con finiſſima lima ſi tolga via tutto il ſuperfluo, coſicchè non rimanga ſe non quanto appare in figura. Ora con la mano guidato uno ſtilo o penna ſtrettamente d'intorno ai margini della reſtante lamina, quella ſezione verrà, che piuttoſto volevaſi delineare. Tale è l'Iſtromento, che per tali deſcrizioni tengo ancor io per mio uſo.

ISTROMENTO V.

PER LA LOGARITMICA E TRATTORIA.

NOn ſenza grande riputazione del nome loro Nepero trovò la *Logaritmica*, Claudio Perralto la *Trattoria*, ed il Sig. Marcheſe Poleni dell'una e dell' altra la *Deſcrizione Organica*. Ma avvegnacchè forſe, ſe mal non m'avviſo, riducendo la macchinetta del prefato Sig. Marcheſe a più poche parti, potrebbe forſe la compoſizione della medeſima riuſcire più facile ed intelligibile, ho penſato, che così foſſe bene deſcriverla come ſta in figura, laſciando nel piacere del diſcreto artefice l'aggiungervi da ſe altre parti, quando in pratica le trovaſſe neceſſarie, e conferenti alla natura dell' Iſtromento. E però vediam prima come ſi generi la *Logaritmica*, che poi paſſeremo alla ſua deſcrizione.

AR-

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Logaritmica.

PEr dar chiaramente a conoſcere l'origine di tal curva (*Fig.* 1. *Tav.* 4.) dai punti A*bcd* ec. egualmente diſtanti, e preſi nella linea A*f*, che ſarà la *direttrice* della curva, ſiano perpendicolarmente erette le linee A16, *b*8, *c*4 ec. che ſaranno le ordinate decreſcenti in data ragione geometrica. La linea 16, 8, 4, ec. che detti punti uniſce, ſia la *Logaritmica* propoſta, della quale l'eſſenziale proprietà è l'eſſere la di lei *ſottangente* eguale ad una coſtante data. Proprietà appunto ſu cui l'inſigne Autore fondò l'ingegnoſo ſuo Iſtromento, quale per me, come diſſi, non ſi muta, ma ſi riſtrigne, per così dire, in poco, acciocchè più agevolmente la ſua coſtruzione ſi concepiſca.

ARTICOLO SECONDO.

Deſcrizione organica della Logaritmica.

ECco pertanto di nuovo (*Fig.* 2.) un parallelepipedo EP ſimile a quello della *Fig.* 2. *Tav.* 1. ſcavato per il lungo di una ſcannellatura, in cui ſcorre un lungo priſma *d*A di ſimil forma, di cui parte ſta incaſſato nella cavità di quello, e parte ſovraſta al di fuori, abbracciato circa l'eſtremità *d* da una lamina traſverſale T*cd*, nel ſito *cd* ſimilmente per di ſotto incavata, e che ad angoli retti a detto priſma con una vite *c* ſi può in qualunque punto di quello fermare, come più chiaramente ſi moſtra in ſezione (*Fig.* 3.) dove D*c*R rappreſenta la lamina traſverſale T*cd* della *Fig.* 2.; EP dimoſtra un taglio fatto per traverſo del parallelepipedo PE, e la parte T nel mezzo con puntini ombreggiata è

la ſezione del detto priſma *d*A, che quivi ſi vede, come per la ſua forma colla vite ſuperiore *c* ſi poſſa ſtringere con la lamina traſverſale DR. Parte di queſto priſma (*Fig.* 2.) è anche il pivolo *g*, che ſulla cima in ſpira ſi avvolge, e ſi accoppia con la madrevite *y*, di modo che, fermato comunque il parallelepipedo PE al piano della carta, ſe meſſa mano al manichetto M, ſi tira il priſma *d* A verſo E, ſeco eſſo porta anche il pivolo *g*, e la lamina traſverſale T*cd*, perchè tutti tre inſieme, quaſi che formano un medeſimo ſolido.

Semplice e intelligibile del pari riſulta anche la coſtruzione della ſeguente aſta *o*D e per la *Fig.* 2., e per un tronco di detta aſta traſportato più in grande nella *Fig.* 4.. Eſſa quindi (introdotto il pivolo *g* nella feſſura, ond' è per il lungo aperta e larga quaſi così come quello è groſſo) giace ſul priſma *d*A, e quindi preſſo D è ſoſtenuta da una ruota R verticale all'orizzonte, alla quale un'altra ruota K ſovraſta a quella eguale, ma all' orizzonte parallela e mobile d'intorno al pivolo *m*, ſituata di modo che una linea condotta dal centro di queſta ruota al punto, in cui la ruota verticale R tocca il piano della carta, paſſar debba preciſamente pel centro di detta ruota verticale R. Queſta ruota R dovendo ſegnar la curva ſulla carta, termina la ſua circonferenza in acuti e minutiſſimi denti, l'altra ruota all' oppoſto in un margine liſcio, eguale, e polito, acciocchè volgendoſi ſulla lamina traſverſale, non ſi ſcomponga, e turbi il moto dell' altra ruota R; avvertendo che ſe detta ruota R foſſe troppo leggiera per imprimere la curva ſulla carta, ſi potrebbe render più grave, caricando di una sferetta V il pivolo *m* prodotto al di ſopra della ruota orizzontale K. Si vuole inoltre (*Fig.* 2.) che i due maggiori piani dell'aſta *o*D ſiano coſtantemente paralleli all' orizzonte, al che coſpira e la grandezza della ruota verticale R, e la madrevite *y*, che a queſt'uopo nel fondo è aſſai larga, ed intorno al pivolo *g*

ſer-

serrandosi, frena e ritiene la instabil asta oD, cosicchè non vacilli nè declini dal detto parallelismo, ma pure liberamente muovasi. La lamina poi trasversale T*cd* nel sito *cd* in grossezza tanto si estende, che la distanza *cd* dal piano verticale *c*T apparente in *Fig.* 2. al piano verticale *d* di detta lamina sia eguale al raggio della ruota orizzontale K.

Ma ormai si concepisca, la *direttrice* della curva essere una linea, che pel lungo tagliando per metà il parallelepipedo PE, si arresti nel piano, e stia invece della *direttrice* A*f* della *Fig.* 1.; ond'io dico ora, che la linea tirata dal punto R (ove la ruota verticale tocca il piano della carta) al punto, che perpendicolarmente nella linea dell'asse, o sia *direttrice* EP soggiace al punto *d*, sarà un'ordinata alla curva; la linea tirata dal medesimo punto di contatto R al punto, che nella linea dell'asse soggiace al punto *g*, sia la tangente; e la *sottangente* sarà la linea presa nell'asse e definita dai punti perpendicolarmente cadenti nel detto asse dai punti *d*, e *g*. Onde si vede, che per modificar detta *sottangente*, non si ha che rimovere, o accostare al pivolo *g* la lamina trasversale T*cd*, e poi in detta distanza fermarla con la vite *c* al prisma *d*A.

Tutte queste cose poste, tirando col manichetto M il prisma *d*A verso E, e conseguentemente la lamina trasversale T*cd*, gireranno tutte e due le ruote, ed il punto di contatto R si moverà per una linea, di cui la *sottangente* *dg* sarà costante, e quindi descriverà la *Logaritmica*.

AR-

ARTICOLO TERZO.

Della Trattoria di Perralto, sua origine e descrizione per approssimazione.

Essendo che i prudenti e dotti uomini talvolta negli oziosi tempi degnarono della loro attenzione alcune cose, che da prima parevano dispregevoli, ma poi da quelle a grandi scoperte si trovarono impensatamente condotti; così Perralto un dì osservando attentamente il movimento del suo orivolo portatile tirato per un capo della catenella annessa lungo una riga, s'accorse di una curva tracciata dall' orivolo sul piano della tavola. Onde (1) fattone consapevole il Leibnitzio, e poi venutane notizia a Cristiano (2) Hugenio, e da essi richiamata a sottil esame la natura sua, si ebbe presto trovato, che era ben degno oggetto di que' due insigni Geometri quella curva, che prima sol fu trattenimento di un saggio Osservatore; perchè e per essa si quadrarebbe l'*Iperbola*, e somministra i punti della *Catenaria*, e della *Logaritmica*, e di altri teoremi belli e leggiadri è feconda, esposti ampiamente e divinamenre dal Sig. Marchese Poleni nella sovracitata epistola. Ma fra le eccellenti sue proprietà una principale, e che per ora fa al mio proposito, è, che di tutte le *tangenti* alla curva le porzioni intercette fra essa e la sua *direttrice* siano eguali; e però da questa si potrebbe dedurre la seguente descrizione per *approssimazione*.

Laonde presa (*Fig.* 5.) col compasso una data *costante* *a*B, e fatto centro in un punto *m* qualunque di detta *costante*, ma più vicino ad *a* che sia possibile, si segni il punto

(1) Negli *Atti di Lipsia* mese di Settembre 1693.

(2) Nel *Giornale de' Letterati Oltramontani* mese di Febbrajo 1693.

to C nella linea BK, che sarà la *direttrice*, a cui da *m* sia condotta la retta *m*C; poi fatto centro in *n* tanto da *m* distante, quanto *m* da *a*, e con la medesima apertura tagliata BK in D, sia condotta la retta *n*D; e così via via fatto centro in *o*, secata BK in E, sia tirata *o*E ec. La linea scorrente per i punti *a*, *m*, *n*, *o* ec. sarà la proposta *Trattoria*. Imperciocchè e le linee B*a*, C*m*, D*n* ec. sono per la costruzione eguali, e sono anche *tangenti*; mentre dacchè la intercetta F*d* qualunque costitui una parte di se *bd* per elemento della curva, ancorchè poi venga prodotta in *z*, non però entra mai più nell'interno di quella; perchè quinci la porzione *b*F col prossimo elemento *bc* forma l'angolo esteriore F*b*G; e quindi nella parte opposta la prodotta *b*Z con l'elemento *bo* l'angolo parimenti esteriore Z*do*; cosicchè per la costruzione tutte le intercette l'una nell'altra incontrando sempre alla parte interiore con un angolo d'inclinazione qualunque (angolo però, il di cui lato opposto è costantemente una qualche parte della *direttrice* BK) ne segue, che dopo l'intersezione, l'angolo al vertice opposto sempre occorra del pari alla parte esteriore, e però le intercette B*a*, C*m*, D*n* ec. siano *tangenti*, e la curva descritta una *Trattoria*.

Ma qui m'occorre d'avvertire, che la suddetta descrizione è dalla descrizione dell'altre curve diversa in questo, che in quelle (come nella *Logaritmica Fig.* 1.) almeno alcuni pochi punti 16, 8, 4 ec. sono realmente punti della descritta curva, benchè poi gli altri posti fra il 16. e 8., fra 8 e 4 ec. non siam sicuri che se le appartenghino. Ma nel mio caso (*Fig.* 5.) niun punto si potrebbe veramente dire, che fosse punto di *Trattoria*; perchè se fosse altrimenti, converrebbe, che su le *tangenti* fossero state prese le particelle *am*, *mn* ec. infinitamente piccole, ma col compasso non si potevano prendere se non di finita grandezza; onde ne segue che la proposta descrizione della *Trattoria* per appros-

per *approssimazione* (1) vera in astratto, sia impossibile in pratica. Tuttavia parmi che il metodo usato in detta *Fig.* 5. quan-

(1) Dalla considerazione di questa curva pare che si possa dedurre una nuova foggia di armare un trave (*Fig.* 7.) BK, che alcun grave peso dovesse sostenere, componendo per di sotto a quello alcuni vetti C*m*, D*n* ec. in guisa di *tangenti* ad una *Trattoria*; perchè a prima vista si vuol credere, che di tutto il peso del trave BK parte debba gravitare contro il fianco della muraglia *m*B, e parte della sua forza premente venire conversa in se stessa. Imperciocchè supposto che il vette *m*C quinci poggi al muro nel punto *m*, e quindi nel punto C sostenga il trave BK, parmi (perchè il vette è applicato obbliquamente nel punto C) che la sua forza rispetto all' inclinazione della potenza a cui resiste, si possa considerare come risolvibile nelle due *m*B, *mx*, le quali resistono al trave in C: la prima da C verso *b*, che si oppone alla sua gravità, l'altra da C verso K; perchè è evidente, che, se il trave non fosse ben serrato nel muro, la gravità sua, e la obbliquità del vette cospirerebbero a farnelo uscir fuori.

Ora per trattenimento vorrei dimostrare, che se v'aggiungo un altro vette D*n*, la gravità del trave nel punto D, che per mezzo del vette D*n* va ad agire nel punto *n* del vette *m*C, accrescerà la forza del vette *m*C, che resiste nella direzione C*b*, e diminuirà quella ordinata nella direzione CK. Doppio vantaggio onde il trave sia più validamente sostenuto, e ritenuto nel muro nel suo luogo B. E ciò perchè la forza *m*C, che prima era di semplice resistenza, viene ora per l'urto del secondo vette D*n* accresciuta di una forza attiva risolvibile in due, una delle quali, come farò vedere, agisce in conseguenza della direzione C*b*, scaricando così il muro di una parte di pressione, e l'altra opera da C verso B, cioè in verso contrario della direzione CK.

Risolta la forza del secondo vette D*n* (*Fig.* 8.) nelle due *gn*, *en*, certo è che sulla forza *gn* non cade quistione, perchè questa agendo nella medesima direzione del vette *cm*, sicuramente si adopera contro la muraglia in *m*; ma la forza *en* agisce nel punto *n* ad angoli retti del vette *mc*; onde qui si troviam nel caso di una leva del terzo genere, in cui la potenza si esercita in *n* contro due resistenze, l'una in *c*, l'altra in *m*. Dunque l'azione della forza *en* sarà in *c* ed *m* in ragion reciproca delle distanze *nc*, *nm*. Si divida perciò la forza *ne* in *i* in ragion di dette distanze, cosicchè $cn : nm :: ni : ie$. E poi alla estremità della parte minore *nm* si faccia a detto vette *mc* una perpendicolare *mz* eguale alla maggior porzione *ni*, ed alla estremità *c* della parte maggiore *nc* si tiri la perpendicolare *cd* eguale alla minor porzione *ei*. Ora la retta *mz* rappresenta l'azione della forza *en* del vette D*n* esercitata parimenti nella muraglia; la retta poi *cd* rappresenta la quantità dell'azione, che detta forza *en* adopera contro il trave BK.

Finalmente anche questa forza *cd* si risolva nelle due *cq*, *cb*; e si vedrà che *cb* opera in conseguenza della forza supposta nella *Fig.* 7. resistente nella direzione C*b*; e perciò aumenta detta forza di una forza viva eguale a *cb* a scarico della muraglia. La forza poi *cq*, perchè opera in verso contrario alla forza ivi supposta ordinata nella direzione *c*K, diminuirà detta forza diretta per *c*K di una forza viva eguale

quantunque rigorosamente falso, nonostante in pratica si potrebbe ammettere, perchè se non altro, prendendo dette particelle *am*, *mn* ec. più piccole che si può, tanto detta descrizione fisicamente si accosta al vero parametro della curva, che si può dire quasi esser dessa; e spicca del pari quella proprietà principale detta di sopra, su cui si fonda anche la seguente descrizione organica.

E AR-

le a *cq*; onde il trave BK sarà meno sforzato ad uscir fuori della muraglia. Ciò che era da dimostrarsi.

Un tale raziocinio stando per tutti gli altri vetti (*Fig.* 7.) *o*E ec. le forze contranitenti al trave dovrebbonsi poi intendere come sottrate da quel peso assoluto, con cui in altra guisa nel muro gravitato avrebbe. Mentre benchè a fortificar detto trave potrebbero immaginarsi altre disposizioni di vetti, come se tutti dai punti C, D, E andassero ad unirsi nel punto *m*; nonostante e allora graviterebbe il trave contro il muro con tutta la sua forza assoluta, e l'area E*mno*, che nel mio caso si reca a guadagno, n'andrebbe per quelli impedimenti perduta.

Che se il trave BK (replicando a destra le *Figg.* 7. e 8. rovesciate) stasse con ambidue le estremità riposto per esempio su due muraglie per servire di volta, o sulle sponde di un fiume navigabile in luogo di ponte; in tal caso (oltrecchè l'area E*mno* raddoppiata sarebbe molto opportuna acciocchè la volta riuscisse più aperta, ò i Navigi trovassero più spazioso e libero il passaggio) sembrarebbe poi anche, che la proposizione dovesse essere più probabile; perchè lasciando andare le forze *cq* ec. a sinistra distrutte dalle simili contrarie a destra (nelle quali a mio parere versava la maggior difficoltà) nulladimeno tutte le forze simili alla *cb* restarebbero, le quali contrapponendosi alla gravità del trave, alleggerirebbero le muraglie, o le sponde di una parte del suo peso assoluto; anzi viene in via di corollario, che quando il trave si caricasse di più, le forze contranitenti dovessero risultare maggiori.

Forse, avendo riguardo alla flessibilità del legno, e volendo che il peso ne' punti C, D, E sia maggiore, più che si ritrova distante da B verso K, potrebbe questo mio discorso riuscire anche più retto; ma io non vommene dichiarare in verun modo garante, e quand'anche andasse per avventura tutto ad urtare in qualche paralogismo, come pure ho qualche ragion di dubitarne, e che il trave, nonostante tale combinazione di vetti, caricasse tuttavia la muraglia con tutto il suo peso assoluto; contuttociò ho voluto questo mio sospetto semplicemente produrre per animare altrui a tentare con più efficace industria di recare la *Trattoria* a qualche uso, come il celebre Nepero fece della sua *Logaritmica*, proponendo sull' idea di questa curva il suo sistema de' *Logaritmi*.

ARTICOLO QUARTO.

Descrizione organica della Trattoria di Perralto.

Siccome Leibnitzio, che descriveva questa curva con un peso attaccato ad un filo, ed Ugenio con una rigida verga fornita alle due estremità di una punta, non erano contenti di questi loro Istromenti, perchè involgevano il Problema, ed erano lo stesso che tirar per la tavola l'orivolo di Perralto, in quella guisa appunto che sarebbe apposto a biasimo, se per descrivere le sezioni coniche, altri recasse prestamente innanzi tre pezzi di un cono, intorno a' quali una penna si avesse a guidare; così per la stessa ragione il Sig. Marchese Poleni non avrebbe di che esser molto lieto dell'Istromento suo, se non si potesse considerare come ad altra curva inventato, e quasi per un di più applicato anche alla *Trattoria*; e se di quello del Leibnitzio, e di Ugenio non fosse senza alcun dubbio migliore, e l'inventarne un ottimo sulle presenti equazioni impresa quasi che disperata non fosse.

Perlocchè ripigliando l'Istromento suddetto, dico che per descrivere la *Trattoria* basta (*Fig.* 2.) estrarre fuori del prisma A*d* la lamina trasversale *dc*T, e porla da canto come inutile, e nel forame *o* dell' asta *o*D far entrare il pivolo *g*, e usar poi l'Istromento, come si è detto, che così detta asta sarà la *tangente*.

Ma acciocchè la *tangente* si possa far eguale ad una costante data, in vece d'introdurre il pivolo *g* nel predetto forame, si faccia che entri nel forame di un anello, di cui (*Fig.* 6.) *ab* sia il piano orizzontale, ed il piano verticale sia *bd*, quale nei voti di mezzo riceva detta asta, espressa qui per il tronco GH, e che si possa a qualunque punto di quella fermare con la vite laterale *b*; avvertendo, che l'anel-

l'anello non circondi affatto detta asta, ma si arresti come prima tocca il margine del piano inferiore orizzontale di quella; acciò detta asta nel sito *g* non sia per la grossezza dell'anello più alta in questo caso della *Trattoria*, che non fu in quello della *Logaritmica*.

ARTICOLO QUINTO.

Trattoria di base circolare, sua origine, e descrizione per approssimazione.

POtendo noi non che le *Trattorie* pensate (1) dal Bernuglio, e dal Leibnitzio (2), ma infinite altre immaginare per lo variare infinito delle lor direttrici, dovrebbero restar in tanta dovizia le nostre brame spente, e di una già esposta contente. Pure non vo' mancare di accennare almen quella di base circolare, e per essere gentil cosa, e per essere un caso generale, che per le ragioni altrove addotte, comprende anche la *Trattoria* di Perralto.

Se dunque si concepisca (*Fig.* 2. *Tav.* 5.) un filo *ab* eguale per esempio al raggio del circolo *bcd* ec. di cui ad un' estremità *a* alcun peso sia attaccato, e l'altra *b* sia condotta per la periferia *bcd* ec. il peso *a* descriverà una *Trattoria* *a*, *e*, *f*, *g* ec. di cui *ab* sia la *tangente* eguale ad una costante data, e la base, o sia *direttrice* sarà la periferia *bcd* ec.

Questa curva si descrive altresì per *approssimazione*, come quella di Perralto; imperciocchè presa col compasso la data costante *ab*, che non ecceda il raggio del detto circolo *bcd*, e fatto centro in *e* punto vicino ad *a* più che sia possibile, si segni il punto *c* nella periferia direttrice *bcd* ec. cui da *e* sia condotta *ec*; poi fatto centro in *f* tanto da *e* distante, quanto *e* da *a*, e tagliata con la medesima apertura

E 2

(1) Bernuglio negli *Atti di Lipsia* mese di Giugno 1693.

(2) Leibnitzio negli *Atti di Lipsia* mese di Settembre 1693.

tura la periferia in *d*, sia condotta *fd*; e così procedendo fatto centro in *g* tagliata la periferia in *h* si tiri la retta *gh* ec. Allora la linea *aef* ec. rappresenta una *Trattoria* di base circolare; in cui, come in quella di Perralto, il peso *a* sempre più s'accosta alla base BK senza arrivare mai a una minima distanza, cioè a toccarla; così in questo caso della base *bcd* sempre più s'allontana, senza mai pervenire ad una distanza massima, cioè senza mai andar nel centro *c*, dove inclinando per una spirale *efgm* ec. sempre più s'avvicina, e non vi arriva giammai. Inoltre come (*Fig. 5. Tav. 4.*) nel caso di Perralto, scorrendo nella *direttrice* BK il *raggio* G*u* insieme col *quadrante conjugato* L*bu*G, ovunque in *b* taglia detta *Trattoria*, la taglia ad angoli retti; così anche in questo caso (*Fig. 2. Tav. 5.*) scorrendo il centro di un quadrante per la periferia *bcd* ec., e un sito *u* qualunque acquistando, dovunque ad un medesimo verso le spire della *Trattoria* da quello si tagliano in *m* ed *n*, si tagliano appunto ad angoli retti. Ma voglio lasciare nell'altrui piacere di rincontrare con più lungo confronto le restanti proprietà di queste due curve, giacchè ciò non appartiene al mio argomento.

ARTICOLO SESTO.

Descrizione organica della Trattoria di base circolare.

PEr non fabbricare appostatamente un Istromento per questa sola curva, basterà per ora levare da quello della *Fig. 2. Tav. 4.* l'asta *o*D, e messo un pivolo nel forame *o* di detta asta, o in quello dell'anello *ab* (*Fig. 6.*) che la circonda, condurre poi detto pivolo per la periferia di un circolo già prima segnato con lapis sul piano della carta. E qui voglio che la materia delle *Trattorie* sia spedita e al suo fine condotta.

ISTRO-

ISTROMENTO VI.

PER LA CICLOIDE.

IN quella guisa che le *Concoidi*, e le *Trattorie*, e tant' altre curve variano per lo infinito variare delle loro *direttrici*, così le *Cicloidi*, che generalmente nascono dalla revoluzione di un cerchio sopra una linea qualunque data, per lo infinito variar di detta linea, infinitamente variano. Ma per non entrare in questa interminabile varietà, a quelle sole conviene attenersi, che o per il volger di un cerchio sopra una retta, o sulla periferia di un altro cerchio risultano; giacchè, come fu altre volte notato, l'un caso l'altro contiene, perchè si reputa la linea retta essere una periferia di un circolo infinito. Laonde riservando per un altro luogo (1) le *Cicloidi* della seconda classe, si comincierà da quelle della prima, cioè di base retta; le quali avvegnachè siano di tal genere che non ripigliano nuove forme, ma ricevono soltanto alterazione di grandezza o estensione; nonostante nella costruzione del presente Istromento voglio riguardare anche a questa sorta di cangiamento; sì perchè questa curva negli orivoli a pendolo utilmente si potrebbe forse adoperare, sì anche perchè l'Autore altre volte da me (2) lodato in proposito della *Cicloide* espressamente dice: *Rotulam, cujus rotationis ope delinearetur Cyclois, inter germana organa haudquaquam ponerem, cum rotula una ad unam tantum Cycloidem delineandam usui esse possit.*

AR-

(1) Istromento IX. Artic. IX.

(2) Il Sig. Marchese Gio: Poleni nel luogo sopracitato.

ARTICOLO PRIMO.

Dell' origine e proprietà della Cicloide.

SE adunque ſuppongaſi (*Fig.* 3. *Tav.* 5.) un dato *circolo generatore* VRD ruotare ſulla retta baſe, o ſia *direttrice* DK dal punto V preſo nella periferia di detto circolo, verrà deſcritta una curva VSK, che ſarà una *Cicloide*, e le proprietà ſue inſervienti alla ſeguente coſtruzione ſaranno:

I. Che la *tangente* RT del *circolo generatore*, determinata dalla *tangente* ST della *Cicloide* nel punto d'interſezione T, eguaglia la porzione RS dell' *ordinata* OS compreſa fra la curva VSK, e la *periferia generatrice* VRD.

II. La porzione RS è eguale all' arco VR; ma la *tangente* RT è eguale a RS: dunque RT eguale all' arco VR; e perciò la *tangente* RT ſi chiama anche *devoluta* dell' arco VR.

III. La *Cicloide* VSK, di cui ſta il vertice nel punto V, due volte preſa è eguale a quattro diametri VD.

IV. Se finalmente ſi produca la ſottenſa DR, finchè occorra nella *tangente* ST della *Cicloide*, dico che la prodotta DR nel punto N divide per metà, e ad angoli retti la porzione di detta *tangente* definita dai punti eſtremi dell' *ordinata* OS, e della *tangente*, o ſia *devoluta* RT. Concioſſiacchè eſſendo eguali gli angoli ERD, DRF, perchè miſurati dalla metà d'archi eguali FD, DR, ſaranno eguali gli angoli al vertice oppoſti TRN, NRS; ma ſono eguali parimenti gli angoli TSR, STR, perchè oppoſti a lati per la coſtruzione eguali TR, RS; e perciò il triangolo STR è *iſoſcele*. Dunque la prodotta DR dal vertice dell' *iſoſcele* R condotta nella baſe ST, giacchè divide per metà l'angolo TRS al vertice R, taglierà parimenti per metà, e ad angoli retti la baſe ST a quello oppoſta.

Tutte queſte coſe ſi vogliono aver dette in qualunque pun-

to

to della periferia VRD occorra il punto R di comune interſezione delle linee ET, DN, OS, e raggio CR. Onde mi piace di ſeguire queſto punto d'interſezione R per tutto il corſo della *periferia direttrice* VRD, ed eſaminare i moti particolari di dette linee interſecanti, che per rapporto alle ſuddette proprietà devono riſultare.

ARTICOLO SECONDO.

Nuova origine della Cicloide riſultante dalle ſue proprietà.

QUel *circolo generatore* VRD, che nel precedente Articolo fu detto, che generava la *Cicloide* ruotando ſopra la *direttrice* BK, ora intendo, che immobile ſtia, e che la curva derivi da tali movimenti relativi alle ſue proprietà.

Laonde acciocchè primieramente la porzione RT della *devoluta*, o ſia *tangente* ET (in qualunque punto R tocchi la periferia direttrice) ſia eguale alla porzione VR di detta periferia, fa di meſtieri, che prima coincida con la retta VB, e l'eſtremo ſuo punto T ſi trovi preciſamente nel vertice V, e che poi a poco a poco da detta periferia diſcoſtandoſi dalla parte VRT, ed accoſtandoviſi dalla parte DRE, finalmente vada a finire nella retta DK, e l'eſtremo ſuo punto T nell'eſtremo punto della curva K coincida.

La *norma* poi (che così mi giova chiamar le due linee DN, TS congiunte inſieme in N ad angoli retti) perchè deve eſſer toccata e repulſa dalla *devoluta* RT in T, e non declinare però mai nè dal punto D, nè dal punto R di comune interſezione, avrà tal movimento, che il punto N ſarà prima ſtato preciſamente in V, ma poi dalla *devoluta* RT quaſi, dirò così, urtata e reſpinta, anche il punto N ſi ſarà ſempre più allontanato dalla periferia, finchè nel punto K ſia anch' eſſo concorſo, ed il lato DN coincida con DK.

Segue l'*ordinata* OS, quale acciò coſtantemente formi l'angolo

golo FRD eguale a DRE, coinciderà precisamente con la retta VB, e s'andarà poi di modo allontanando da quella, ed accostando a DK, che a queste ad a sestessa sia costantemente parallela, e normale al diametro VD.

Quanto al *raggio* CR mobile intorno al centro C coinciderà prima con CV, e seguendo poi anch'egli di continuo il punto R di comune intersezione, finalmente terminerà in CD, e sarà sempre normale alla *tangente* RT.

Ora per questi movimenti eccitati tutti in un tratto, come necessariamente dipendenti e inseparabili dalle sovr'accennate proprietà, avviene, che il punto d'intersezione S si debba costantemente in un punto della curva ritrovare. Anzi quantunque nel punto V, e nel punto K non sia per essere alcuna intersezione, perchè però ivi è per essere il principio ed il fine di quella, il punto V ed il punto K dovranno nonostante annoverarsi fra i punti della curva. Ma giova qui ricordare una cosa, che quanto prima occorrerà, cioè che in principio di moto il punto estremo T della *devoluta* RT, i due punti d'intersezione R ed S si troveranno ristretti nel punto N, e questo N in V, onde tutti si troveranno raccolti nel punto V; e che nel fine di detto moto, cioè quando il punto R sarà pervenuto in D, i punti T ed S saranno ridotti in N, ed N in K; e però T, N, S uniti tutti coincideranno in K.

Tutte queste cose poste, concludo che composta una macchinetta con tali e tante parti, che alle predette linee, cioè al *circolo generatore* VRD, al *raggio* CR, alla *devoluta* RT, alla *norma* DNTS, all' *ordinata* OS corrispondano; e ciascheduna movasi con movimenti ai moti di quelle rispettivamente conformi, questa potrà fornire la descrizione della *Cicloide* proposta. Ma per far prova di questo fatto, prestamente passerò alla descrizione di detta macchinetta, e dirò prima del suo *piano orizzontale*.

A R-

ARTICOLO TERZO.

Piano orizzontale dell' Istromento per la Cicloide.

DOvrebbe riuscir facilissimo a comprendersi il *piano orizzontale* di questa macchinerta, perchè le sue parti (*Fig.* 1. *Tav.* 6.) corrispondono appunto alle linee sopraddette della *Fig.* 3. *Tav.* 5., e sono indicate colle medesime lettere, con i medesimi nomi, e non resta se non da mostrare, come siano anche capaci di quei medesimi movimenti, che furono a ciascheduna attribuiti nell' antecedente Articolo.

E' dunque VRD il *circolo generatore*, qualunque dato preso nella superficie di un tronco d'un cono di legno, espresso nel *piano verticale* della *Fig.* 2. per il trapezio *p a b f*, qual circolo s'intende essere nella detta *Fig.* 2. la linea *e g*, e parallelo alla base *p a* di detta *Fig.* e stare sempre immobile. D' intorno al centro C di detto circolo (torniamo alla *Fig.* 1.) gira orizzontalmente in luogo di *raggio* l'asta CR (che porta un cilindro *n* ombreggiato mobile pure orizzontalmente) da R prodotta fino al forame *n*.

Tra questo cilindro (fatto come in sezione *bd Fig.* 2.) e la periferia del *circolo generatore* VRD è interposto un regolo di legno TE, che sta per la *tangente*, o sia *devoluta*, quale (mentre il *raggio* CR da V si muove verso D, e porta seco il cilindro *n*, che nell' istesso tempo volgesi orizzontalmente intorno al proprio asse) vien quasi per una sorta di trafila spremuto fuori delle due periferie del cilindro, e del *circolo generatore*; cosicchè detto regolo successivamente si muove, e si scosta dalla periferia VR dalla parte VRT, ed a quella vassi di mano in mano combaciando dalla parte DRE, finchè giunga a toccare la periferia nel punto D, dove fermandosi il raggio CR col cilindro annesso *n*, anch'esso cessa di più moversi. Onde a buon conto qui si può osservare, che la *devoluta* risponde

a quelle leggi di moto, che le furono poco fa assegnate. Perchè ed è *tangente* al *circolo generatore* nel punto R, e normale al *raggio* CR, ed accade che la porzione RT sia eguale all' arco VR, nel supposto che in principio di moto la sua estremità T coincidesse in V.

Segue la *norma* di metallo DNTS fessa per mezzo per tutti i lati, regolata al dovuto suo moto da tre pivoli d'acciajo. Il primo dal punto estremo T del regolo, o sia *devoluta* RT, cui sta afferrato, cala giù nella fessura del lato NT, e movendosi insieme con detta *devoluta*, risospinge sempre più ed allontana dalla periferia VR la *norma*, che prima col punto N coincideva nel punto V, finchè si arresta, arrestandosi detta *devoluta* nel punto D. Il secondo fisso nel punto D dell' immobile periferia VRD s'introduce nella fessura del lato ND, e ritiene detto lato, acciocchè da detto punto D non si scosti. Il terzo ed ultimo pivolo, essendo per di sotto fisso nel punto R del rotante *raggio* CR, entra nella fessura del lato ND, e costantemente fa che non declini dal punto R di comune intersezione; onde tenendo detta *norma* ai due punti D ed R, ed essendo dall' estremità della *devoluta* T risospinta, come si è detto, viene appunto a quel moto determinata, che s' era già divisato.

Questo medesimo ultimo pivolo R portato dal *raggio* CR urta, e fa muovere una verga di metallo *tt* F 4 con puntini distinta, che porta le veci di *ordinata*, e che sebbene men si ravvisa in questo *piano orizzontale*, però assai bene si mostra nel *verticale* della *Fig.* 2. per le lettere *qa* K 3 4. Ella è (*Fig.* 1.) connessa e normale ad un prisma *tt* mobile nella scannellatura AQ, che è parallela al diametro VD. Si dirigge detta *ordinata* da *tt* a sinistra verso F, e poi (vedi anche la *Fig.* 2.) ripiegandosi per di sotto a destra arriva fino a 4, e s' interseca col lato della norma N*y* nel punto S, dove è uno stilo afferrato ad un

anel-

anello, o sia guida mobile per N*y*, che questa intersezione continuamente seguendo, descrive intanto sul piano della carta la proposta *Cicloide*. Imperciocchè mentre detta *ordinata* è dal pivolo R urtata, l'annesso prisma *tt* cedendo scorre da A verso Q, e intanto l'*ordinata tt*F4 si muove sempre a se stessa parallela, e normale al diametro VD, e s'accosta per di sotto al punto D, e s'interseca anch'essa nel punto di comune intersezione R, perchè non si muove, se non se essa è appunto dallo spingente pivolo R determinata a muoversi.

Dirò ora, per qual causa alcune parti di questa macchinetta siano in disegno ora espresse con linee vive, ora con morte. Onde egli è da sapere, che le parti dell'Istromento sono realmente collocate a diverse altezze, come meglio si potrà poi anche osservare nel *piano verticale* della *Fig.* 2. La *norma* DTNS (che nel *piano verticale* della *Fig.* 2. è espressa per *x*78*y*) è nel più basso luogo di tutte le altre; sopra a quella segue l'*ordinata tt*F4 (che in *Fig.* 2. si mostra per *qa*K34); d'indi più alta sta la *devoluta* ET (espressa *Fig.* 2. per *eb*) superata però da una porzione del cilindro *n*, e per fine nel più sublime posto avvi il *raggio* CR*n* (che in *Fig.* 2. compare per *rpn*), ed avvi pure una porzione dell'*ordinata tt*F (che in *Fig.* 2. è la porzione *qa*K). Quindi è che quella porzione di esse parti, che nel *piano orizzontale* viene ricoperta da quelle, che si trovano situate in maggior altezza, è con soli punti disegnata; e distinta poi con linee vive resta in vista quella porzione, che sotto a quelle perpendicolarmente non cade. Perciò ora si concepisca (*Fig.* 1.) come parte della *norma* DTNS si mostra abbagliata, e coperta sotto dell'*ordinata tt*F4; questa coperta dalla *devoluta* ET, benchè in figura veramente non appare; la *devoluta* dal cilindro *n*; il cilindro dal *raggio* CR*n*. Ma facciamsi ormai appostatamente da capo al *piano verticale*, di cui soltanto di passaggio alcuna cosa si è detta.

ARTICOLO QUARTO.

Piano verticale dell' Istromento per la Cicloide.

MOlte cose appariranno in questo *piano*, che in quello *orizzontale* o per evitar la confusione non si son poste, o se poste anche vi sono, non si potevano però abbastanza concepire; perchè per la intelligenza di qualunque costruzione organica un piano reciprocamente l'altro ajuta, riuscendo per lo più in un piano men distinte quelle parti, che aperte e chiare risultano nell'altro.

Si concepisca dunque (*Fig.* 2.) che sia con una vite N fermato ed eretto sopra una tavoletta orizzontale RS un forte piedestallo d'acciajo RLC forato in C ed L, ed indi si supponga un chiodo *mr* A, che trapassi per l'asse del cono *fbap*, poi per un bucco *r* circolare della verga *rpn*, e quindi per detti due forami quadrangolari C ed L; finchè per ultimo nella sommità A con una vite si stringa, e ritenga il cono al predetto piedestallo sospeso, di modo che e questo, e quello, e la tavoletta orizzontale formino un corpo costantemente immobile; acciocchè quindi per primo capo nella superficie di questo cono dare e prender si possano infiniti *circoli generatori*.

L'asta poi *rpn* mobile orizzontalmente intorno al punto *r*, cioè d'intorno all'asse del cono, o sia chiodo *mr* A sta per il *raggio* C*n* della *Fig.* 1., nel di cui forame *n* s'introduce il palicello *i o n* d'acciajo talmente ripiegato, che la porzione *nb* divenga parallela al lato del cono *pf*, e dopo due piegature, una verticale, l'altra parallela all'orizzonte seguiti la porzione *o i* parallela all'asse *mr* A, e verticale in un con detto asse all'orizzonte. Questa porzione *o i* (perchè per linea retta mira nell'estremo punto R del raggio CR della *Fig.* 1., ed insieme col raggio *rn* della 2. volgesi

gesi d'intorno nel punto *r*) descriverà un cerchio eguale al dato *circolo generatore* VRD della *Fig.* 1., ovvero *eg* della 2., e la modificazione di detto circolo niente più importarà, che spingere su, o giù nel forame *n* il palicello *ion* fermandolo poi con la vite laterale, qualora la porzione *io* miri nel punto *e* del circolo *ge* qualunque dato.

Segue ora il *tangente* regolo, o sia *devoluta* ET, che nel *piano orizzontale* della *Fig.* 1. è situata, di maniera che nel *verticale* della 2. esprimer non si può se non per la sezione *eb* con puntini ombreggiata. Nulladimeno si scorge, come (essendo interposta fra il lato del cono *pf*, e del cilindro *bd* mobile d'intorno ad una porzione del palicello *i o n*) per lo volger di detto cilindro dal *raggio r p n* portato, possa anch'essa girare d'intorno al cono dalla superficie di questo, e da quella del cilindro spremuta fuori quasi, come già dissi, per una sorta di trafila. Ma non si può del tutto rilevare, come dal punto estremo *e* di detta *devoluta* cali giù perpendicolarmente un altro palicello pur d'acciajo, parallelo anch'esso all'asse *mr*A, essendo situato, e coperto di dietro alla porzione *o i*, perchè tanto il punto *e*, che corrisponde al punto T della *Fig.* 1., quanto detta porzione *o i*, che risponde al punto R, occorrono in disegno nella medesima retta *ei*TR.

Ma giacchè abbiam detto di due palicelli, che fanno per i supposti pivoli T ed R moderatori della *norma*, ed *ordinata* della *Fig.* 1., parliam qui anche di un altro palicello, che risponda al terzo pivolo D in detta prima figura supposto. Però il trapezio, o sia figura piana *p a b f* rappresentando in verità la superficie di un solido, cioè di un tronco cono (ciò che è da imprimersi bene nella mente) segue che la linea *rm* condotta sulla superficie del cono della linea *pa* alla linea *f b*, si debba concepire non solo eguale al lato *pf*, ma ancora all'asse del cono egualmente inclinata, e quindi la parte pure *r t* egualmente inclinata, ed eguale

alla

alla parte *p e*. Ciò posto, s'intenda esser fatta nel lato *r m* una tale scannellatura, qual dimostra la *Fig.* 1. nel punto D, in cui si muova, e con una vite si fermi in qualunque punto *t* un prisma di simil forma *l z* congiunto ad un palicello *z&*, che nel punto *z* costituisca con detto prisma un angolo *l z&* eguale all' angolo formato dal lato del cono col suo asse; onde avverrà, che il palicello *z&* (cioè il palicello *t* V, che ormai si vuole intender lo stesso) sia parallelo all' asse del cono, ed al rotante palicello *o i*, e si ritrovi nella circonferenza del medesimo circolo da detto palicello *o i* descritto; perchè il punto *e*, in cui si dirigge la porzione *io*, ed il punto *t*, in cui si è fissato il palicello *t* V, sono dai punti *p* ed *r* rispettivamente equidistanti. Questo palicello *t* V, fisso che sia con la vite al cono, starà insieme con detto cono costantemente immobile; e tutti questi tre palicelli introdotti nella fessura della *norma* determinaranno ai detti moti non solo la *norma* (di cui in questo *piano verticale* non si mostra se non la costa *x 7 8 y* sostenuta da nodi sotto fermati con picciole viti contro i detti tre palicelli) ma anche la seguente *ordinata*, perchè verrà urtata dal prodotto palicello *o i*, che come rispondente al punto R della *Fig.* 1., regola anche la comune intersezione delle dovute parti.

La verga dunque *q a* K 3 4, che già poc' anzi fu accennato essere la *ordinata*, quando viene urtata dal palicello *o i*, scorre per la scannellatura superiore *q* corrispondente a quella orizzontale AQ della *Fig.* 1., e segue di essa (quantunque in questo *piano verticale* non possa apparire) una intersezione col lato della *norma* 8 *y* dichiarato per N *y* della *Fig.* 1., e condotto con la mano dietro a questo punto d'intersezione uno stilo MS connesso, e normale ad una guida mobile in detto lato 8 *y*, dalla punta del detto stilo S vien descritta la curva sul piano della carta.

Ora per passare ad un esempio, nella superficie del tronco

co

co cono dato ſia per *generatore* della propoſta *Cicloide*, invece del ſuppoſto *circolo eg*, il *circolo* EG, che riſponde nella *Fig.* 1. al *circolo u*. Onde preſtamente calato giù il palicello *noi*, e fermato con la vite *n*, quando *io* mirerà in E, ſpontaneamente diſcenderà anche la *devoluta eb* in un col cilindro *bd*, che la ſoſtiene ed abbraccia. Così il palicello *t*V ſia giù cacciato ſino al punto T, e con la vite fermato. Di più eſſendo ſtato detto (1) che in principio di moto (*Fig.* 1.) i pivoli T ed R, e lo ſtilo S debbano ridurſi in N, ed N coincidere col vertice V, tanto dovrà ora ſeguire (*Fig.* 2.) del palicello della *devoluta be*, del palicello *oi*, e dello ſtilo MS, che quei pivoli e ſtilo rappreſentano. Onde (queſti riſtretti prima nel punto 8 della *norma*, cioè N della *Fig.* 1., e queſto 8 condotto inſieme con l'*ordinata* nel vertice *u*, che qui è coperto dall'antepoſto punto T, ma è viſibile nel *piano orizzontale*) ſi move poi con la ſiniſtra il *raggio rpn* verſo chi legge d'intorno al punto *r*, e con la deſtra meſſa in M ſia lo ſtilo MS guidato appreſſo al punto, dove la *norma* s'interſeca con la *ordinata*, che ſi conſeguirà la deſcrizione propoſta.

Notate per fine, che ſebbene quanto ſi è detto ſembra difficile a comprenderſi, ed eſiga per dir vero non poca forza di fantaſia, nonoſtante ſe tornate bene a mente le leggi di Proſpettiva, ſi farà diligente rifleſſione alle ſole linee parallele morte condotte dal *piano orizzontale* al *verticale*, molto meno ardua riuſcirà la intelligenza di queſta coſtruzione; e molto meno ancora, quando per un momento ſi avran meſſi gli occhi ſulla ſeguente tavola, che la elevazione ſcenografica rappreſenta.

AR-

(1) Artic. II. di queſto Iſtromento.

ARTICOLO QUINTO.

Scenografia dell' Istromento per la Cicloide.

QUesta *Fig.* 1. *Tav.* 7. è tanto per se stessa chiara, che non avrebbe forse mestieri di altra esposizione, ma pure volendo qui recar in poche le molte parole dette nei piani antecedenti, sappiate che le parti dell'Istromento messe qui in prospettiva portano rispettivamente le medesime lettere delle medesime parti descritte nell'antecedente *piano verticale*; perchè RCL è il piedestallo (fermato ad una tavoletta orizzontale con la vite N) a cui per mezzo del chiodo *m r* A (qui non si vede *m*) sta in alto il tronco cono sospeso ed immobile. Intorno a detto chiodo in *r* gira verso *q* il *raggio r n*, che seco porta il palicello *n o i*, intorno a cui movesi il cilindro *d*; e tra la superficie di questo, e del' predetto cono lo interposto regolo *tangente*, o sia *devoluta b e* si spreme, e sempre più s' allunga dalla parte di *e*, dove un palicello cala giù dritto ad introdursi nella norma *x* 7 *y*, nella quale s' introduce pure l'immobile palicello TV, ed il palicello *n o i*. Questo palicello *n o i* urta nel medesimo tempo contro la *ordinata q*K 3 4, onde ella scorre nella scannellatura superiore da Z verso *q*; ed intanto lo stilo S connesso alla sua guida M, scorrendo per il lato della *norma* 8 *y* dietro al punto d' intersezione della *norma* coll' *ordinata*, segna sul piano della carta RS la proposta *Cicloide*. Avvertendo che il lato *y* 7 della *norma* sarà sempre tangente alla curva; ed inoltre che sta nel piacere altrui il fare che o l'*ordinata* urti nel palicello *o i*, o che piuttosto il palicello urti nell'*ordinata*, come in figura. Così è arbitraria la situazione della scorrente guida coll'annesso stilo MS; perchè in figura è messa nel lato 8*y* della *norma*, ma tanto si poteva anche introdurre nel-

ñella *ordinata*, facendo però, che lo ſtilo paſſaſſe per la feſſura di detta *norma* prima di diſcender nel piano. Ma perchè tante parti adoprando in queſta macchinetta, e troppi moti ſeguendone, ſi potrebbe dubitare della felice ſua riuſcita, voglio almeno nel ſeguente Articolo farmi incontro a quelle obbiezioni, che mi potrebbero venir moſſe dagli altri.

ARTICOLO SESTO.

Obbiezioni alla coſtruzione predetta, e ſue riſpoſte.

NOn volendo io, come altri fanno, diſſimulare accortamente i difetti di queſta mia macchinetta, io medeſimo li produco, quali alla meglio correggendo, e quali così laſciando ſtare come ſtanno. Potrebbeſi dunque opporre

OBBIEZIONE I.

Che eſſendo due palicelli, ed uno ſtilo, che (*Fig.* 1. *Tav.* 6.) nel principio di moto hanno a concorrere nel punto N, lo ſtilo S per la groſſezza loro non trovandoſi preciſamente in detto puncto N, non potrà (*Fig.* 3. *Tav.* 5.) ſegnare i primi punti della Curva in V, e così nemmen gli ultimi in K; poichè la verga, che ſta per l'*ordinata*, quando arriverà a toccare il palicello D, o ſia *t*V della *fig.* 2. *Tav.* 6. la punta dello ſtilo ſarà lontana da K la metà della groſſezza dello ſtilo, tutta la groſſezza dell'*ordinata*, e la metà della groſſezza del palicello *t*V; e però la curva rettificata non reggerà all'equazione, cioè (*Fig.* 3. *Tav.* 5.) la *ſemicicloide* VSK non ſarà eguale a due diametri VD, nè tutta a quattro, come dovrebbe.

RISOLUZIONE.

L'obbiezione non ha altra risposta, se non che questa imperfezione è, come già notai altrove (1), comune anche ad altri Istromenti inventati da altri singolarissimi uomini.

OBBIEZIONE II.

Ancorchè non andassero dispersi alcuni punti della Curva in K ed V, pure non si ha, che una sola *semicicloide* VSK, restando delusi dell'altra metà a sinistra.

RISOLUZIONE.

Ma volendo pure conseguire anche l'altra metà, lasciando star fermo il tronco cono nella presente situazione, e soltanto portato a man destra il piedestallo RLC *Fig.2.Tav.6.* e messa la *ordinata qa*K 3 4 nella scannellatura B, si potrebbe descrivere anche l'altra metà della *Cicloide* a sinistra; e ciò bastar dovrebbe, come basta per la perfezione d'altri simili Istromenti in questo genere, che non descrivono le Curve, per le quali sono inventati, se non ad una metà per volta. A questo s'aggiunga, che per li usi meccanici basterebbe il poter descrivere una mezza Cicloide, come per esempio nella fabbrica degli Orologi a pendolo.

OBBIEZIONE III.

Essendo piuttosto lunghi i palicelli, e lo stilo, e dovendo il palicello *oi*, e il palicello *c* (*Fig.1.Tav.7.*) urtare e respingere la *norma*, è da temere, che per l'elaterio intrinseco della materia metallica si pieghino i palicelli avanti di po-

(1) Istromento II. Art. II.

poter muovere le rispettive parti, e però non duri in esse quella mutua azione, che ai movimenti già stabiliti si richiede.

RISOLUZIONE.

Onde anche questa infermità pare senza rimedio, perchè non può uom mortale togliere dalla natura l'elasticità. Si potrebbe però se non altro diminuirla, fabbricando l'Istromento di materia poco elastica e dura assai, e più grande che in figura non è.

OBBIEZIONE IV.

Il regolo *tangente*, o *devoluta* *eb* (*Fig.* 2. *Tav.* 6.) non è possibile che, volgendosi intorno alla superficie del cono, cammini esattamente col margine *e* nella periferia del dato *circolo* *eg*; perchè naturalmente inclina anzi per una spirale verso la base di detto cono *pa*.

L'esperienza può presto render paghi i curiosi di questa verità dipendente da una proposizione (1) già dimostrata,

(1) Questa medesima proposizione, benchè enunziata differentemente, è dimostrata dal P. Andrea Tacquet nella Dissertazione Fisico-Matematica: *De Circulorum volutionibus Theor. VIII.* dalla quale derivano alcune conseguenze, che non mi pajono in vero così poco gentili, che si abbiano a tralasciare. Segue dunque:

1. Che, più che sarà lungo il cono, si moverà nell'area di un maggior circolo, perchè (*Fig.* 7. *Tav.* 5.) più acuto che è l'angolo al vertice C, più aperti sono alla base gli angoli CKS, CSK compresi tra il lato del cono, ed il diametro della sua base SK. Ma una spirale non è che una curva, che passa per i punti di un cerchio ai punti di un altro cerchio maggiore. Dunque se nel medesimo tempo che il cono rotola il punto di concorso C dei convergenti lati KC, SC, passando in *x*, poi in *d*, *b* ec. s'allontanasse sempre più dalla base KS, il cono in tal caso moverebbesi sul piano per una spirale KSz; finchè andando detto punto C all'infinito, e (*Fig.* 8.) diventato il cono un cilindro I*n*, moverebbesi in tal caso per un circolo infinito; cioè ivi in tal caso si moverebbe per una retta *nm*. Se poi i lati divenissero convergenti dalla parte opposta, il cilindro diventato di nuovo un cono, tornerebbe ai medesimi movimenti spirale e circolare. E tanto

si

ſtrata, qual' è, che fatto rotolare ſul piano dell' orizzonte un cono roveſciato KSC (*Fig.* 4. *Tav.* 5.) per un impulſo che

ſi vuole aver detto anche riſpetto ad un ſolo tronco di cono Kg, Se (*Fig.* 4.) Perchè non altrimenti che ſe foſſe intiero, non reſta che i lati Kg, Se non ſiano tuttavia convergenti, e però muoverebbeſi in un circolo, il di cui centro accada nel punto, dove detti lati Kg, Se prodotti verrebbero ad unirſi, cioè nel centro C. Oppure moverebbeſi per una ſpirale per una retta; e poi di nuovo per una ſpirale, o per un circolo, ſecondo che entraſſero in ſuppoſto o l'uno o l'altro dei predetti caſi.

2. Immaginiamoci (*Fig* 2. *Tav.* 7.) che un pezzo anteriore ed un poſteriore di un carrettino a quattro ruote, o pur anche di tre, ſia colla vite D ſtretto e confitto l'un all'altro, coſicchè diventi immutabile l'angolo KDS, ed in conſeguenza anche l'angolo KCS formato dai convergenti aſſili Kg, Se in C prodotti. Per l'analogia che queſta macchina ha col tronco cono rotante della *Fig.* 4. *Tav.* 5. e per la medeſima ragione addotta nel Teſto, onde detto cono moveſi in un circolo, ſi raccoglie che urtata comunque nel centro della ſua gravità, debba muoverſi anch' eſſa in un circolo, di cui C ſia il centro. Di più ſe nel tempo che rotola, rallentata la vite D, l'angolo KDS ſi apriſſe ſempre più, e l'angolo KCS ſempre più facendoſi acuto, ſi andaſſe C accoſtando all' infinito, eſſa moverebbeſi per una ſpirale, e poi giunto che fuſſe C all' infinito, per una retta ec. Perchè in ſomma ha qui luogo l'antecedente annotazione con tutte le ſue parti.

Quindi bellamente ſi ſcorge, quant' è per eſſer d'uopo nell' idea di una carrozza, che doveſſe andare non ſolo in un perpetuo cerchio, artificio già fatto volgare, ma andare (ciò che ſi viſto ſulla piazza di S. Marco in Venezia anni fa) e per dritto e per traverſo, e volgerſi per ogni parte da ſe, o per l'opera delle perſone che dentro foſſero. Concioſſiacchè o per una validiſſima molla, che per mezzo di ruote dentate intermedie faceſſe volger li aſſili Kg, Se fermi alle ſue ruote, o ſupplendo gli uomini all' azione della molla (ſecondo che queſta azione foſſe applicata o a ſoſpingere, o a reſpingere) la carrozza o innanzi, o indietro movereb-beſi. Ma acciò ſi moveſſe anche o per dritto, o a deſtra, o a ſiniſtra, ſecondo che la tortuoſità della ſtrada il richiedeſſe, in quella guiſa che l'accorto Nocchiero col timone guida la ſua nave, così avrebbeſi qui a preparare l'ingegno in modo che ſi poteſſe ad ogni occaſione ſtringere preſtamente, o allargare, ed annullare l'angolo KDS, e reſtituirlo anche, quando biſogno foſſe, dalla parte oppoſta. Meccaniſmo che quanto in eſecuzione rieſce mirabile, altrettanto importa meno di ſagacità nell' inventarlo. E' ben vero per altro, che quando ſi voleſſe applicare la carrozza al traſporto di enormi peſi, non potendoſi ſuperare le grandi reſiſtenze, ſe non con grande diſcapito della velocità, perciò tal macchina non ſi potrebbe recare in pratica con gran vantaggio della ſocietà. Concioſſiacchè lo sforzo di un cavallo, che ſeguitamente affatica in luogo di una potenza, può vincere al più una reſiſtenza di 1230. lire; e lo sforzo di un uomo, una reſiſtenza di lire 205., sforzi che ſono come 6 a 1. Onde ſuppoſto che la carrozza tirata da quattro cavalli, e pe-

che duri nel centro della sua gravità, deve egli muoversi in un circolo Syz, nel di cui centro C starà sempre il vertice di detto cono. Perchè essendo i lati KC, SC del cono convergenti ad una medesima parte C, e sempre egualmente convergenti, il cono si deve muovere per una curva, che non solo sia inclinata ad una medesima parte, ma sempre egualmente inclinata; e questa Curva non è altro che il circolo. Se per contrario si facesse muovere il piano Syz d'intorno al fermo cono, il piano si muoverebbe in un circolo, persistendo col punto C nel vertice C di esso cono; perchè o che si muova il cono sul fermo piano, o che si muova il piano sul fermo cono, niente però si muta

ta

pesante insieme col carico 4920. lire (che è la somma delli sforzi di quattro cavalli) faccia il viaggio di una lega all'ora; se dovesse essere spinta innanzi da quattro uomini applicati per dentro a farla muovere per mezzo di ruote dentate, dovendo la forza dell'uomo essere accresciuta di sei con altrettanta necessaria diminuzione della velocità, essa non sarebbe in tal caso più di una lega in ore sei. Tardità in vero fastidiosa, per non dire insopportabile.

3. Quindi dipende anche l'uso che si fa (*Fig. 3. Tav. 7.*) de' cilindri per trasportare, dove che sia, qualche grave peso; perchè se essi sono paralleli, il peso avanza per drittura (facendo astrazione dalla inegualità del piano, del peso, e de' cilindri) se convergenti, per circolo ec.

4. Nei molini costrutti per macinare il seme di lino si fa uso (*Fig.4.Tav.7.*) di una pietra LG della forma di un pezzo di cilindro in questo modo: sta verticale all'orizzonte eretta un' antenna AB mobile intorno a se stessa, per lo volger di una ruota trasportata dalla corrente di un rio. Da quest' antenna si spicca un forte braccio verso G, che introdotto nell'asse del cilindro, e in un coll' antenna movendosi, trae seco in giro il pesante macigno, quale girando intorno al braccio, ed insieme rotolando sul piano, frange così e pesta il sottoposto seme. Onde a me pare, che se detto macigno fosse piuttosto della forma di un tronco cono KSge tornerebbe assai meglio. Perchè un cilindro rovesciato urtato nel centro della sua gravità naturalmente, come si disse, inclina per una retta; onde volendolo contro alla sua natura determinare ad un moto circolare, non solo bisogna molta più acqua, ma dovendo altresì il macigno, e le ruote adoperare maggior forza, la macchina assai più presto si logora. Che se in luogo del cilindro LG fosse posto in pratica un tronco cono Kg,e S portato in cerchio sul piano orizzontale LS dal braccio AC, che si piega nel vertice C di detto cono, e per l'asse del medesimo trappassa (perchè il cono sospinto naturalmente movesi in circolo) incontrando perciò la macchina minor resistenza, le parti sue sarebbero men tosto consonte, ed un minor volume d'acqua basterebbe.

ta la figura del cono, e del piano, la quale interviene a produrre un tale effetto. Secondariamente, non è altro il cono (*Fig. 6. Tav. 5.*) che un settore SCz (*Fig. 5.*) di un circolo, che è a tutta l'area SCyz, come (*Fig. 6.*) il raggio RS della base del cono al lato CS di detto cono. Imperciocchè si concepisca (*Fig. 5.*) il settore SCz ombreggiato essere una carta mancante dell' intiera area di un circolo, la porzione Syz, onde approssimati, e fatti combaciare i due lati Cs, Cz in uno, venga formato (*Fig. 6.*) il cono SCR. Quindi tosto si scorge, che il raggio CS ovvero Cz (*Fig. 5.*) diventa il lato Cs del cono SCR della *Fig. 6.* Di più la porzione di periferia ombreggiata Sz (*Fig. 5.*) pareggia (*Fig. 6.*) tutta la periferia della base del cono. E però essendo le periferie come i diametri, sarà (*Fig. 5.*) tutta la periferia Syz alla porzione Sz, come (*Fig. 6.*) CS ad SR. E perchè i settori di un medesimo circolo sono in ragione delle loro porzioni di periferia, tutta l'area del circolo (*Fig. 5.*) sarà alla parte ombreggiata, come (*Fig. 6.*) CS ad SR.

Queste cose premesse, ingegniamoci ora di mostrare per qual causa un regolo messo a traverso, e ad angoli retti di un cono, se lo si fà muovere sopra la superficie di esso cono, anzi che persistere sopra quel circolo parallelo alla base, su cui fu posto, naturalmente per una spirale verso detta base inclini. Proposizione verissima (1), ma che per

(1) Dalla proposizione, e da quanto il Testo contiene in appresso si rileva

1. Che il regolo I*m* (*Fig. 4. Tav. 5.*) tracciarà sopra un cono o più di una spira, o meno di una spira, o una intiera per lo appunto, secondo che il *settore conico* *n*C*d* sarà più o meno prossimo ad un quadrante *n*C*y*, e secondo che il regolo I*m* sarà situato più o meno vicino a C*y*.

2. La spirale tracciata sul cono sarà sempre eguale alla retta I*m*; perchè è la medesima retta, dirò così, che sullà superficie del cono si avvolge.

3. Questa *spirale conica* impressa sulla superficie del cono rovesciato, rotolando esso descriverà vicendevolmente sul piano la retta I*m*.

4. Si potrebbe meccanicamente descriver questa spirale sulle superficie del cono, tagliando prima in carta il triangolo rettangolo CI*m*, di cui l'ipote-

per comprenderla, ben sarebbe, che prima se ne facesse in fatti una prova meccanica sopra una piramide, e poi sopra

tenusa C*m* fosse eguale al lato del dato cono, ed applicando il lato CI di detto triangolo al lato di detto cono in modo che l'angolo C stasse nel vertice; perchè piegando poi detta carta d'intorno alla superficie conica il lato I*m* indicarebbe la proposta spirale. Ma non essendo questa tale descrizione per essere molto utile ai Meccanici, ne proporrò un'altra; non già perchè creda che ella sia loro necessaria, sapendo benissimo, che già non mancano altri metodi, ma perchè questa è tale, che ha direttamente relazione a quanto si è detto, e può avere un amplissimo uso.

Sia dunque, per il modo che si accennarà nell' *Istromento IX. P. III. Art. X.* descritta (*Fig.* 5.) sul piano una spirale qualunque S*ab* ec. (che sarà quella di Archimede nel caso, che si propongano eguali li spazj tra una spira, e l'altra) e postovi sopra un cono rovesciato, che col vertice occorra nel centro C di essa, si faccia rotolare, che sarà dalla *spirale del piano* tracciata sulla superficie del cono una spirale (*conica* da me detta) di un numero di spire eguale al numero delle spire della *spirale del piano*, moltiplicato per il numero delle volte, che il *settore conico* SC*z* entrarà nell' area di un circolo, di cui il raggio sia eguale al lato del dato cono. Onde nel caso della Figura, essendo 2 il numero delle spire della *spirale del piano*, e 3. il numero delle volte che il *settor conico* SC*z* entra nell' area del circolo; moltiplicato 2 per 3 verrà 6 numero delle spire della *spirale conica*. E la ragione è perchè quante sono le spire della *spirale del piano*, tante sono le porzioni di essa in ciaschedun *settore conico* impresse, e queste porzioni diventano spire intiere nella superficie del cono:

Quindi dato un cono, di cui il *settor conico* sia parte aliquota dell' area di un circolo, ben si vede, che si potrà scolpire di qual spirale più piace, e di un numero di spire qualunque; perchè sta nel voler nostro descrivere sul piano quella spirale che più faccia mestiere, e poi applicare sul dato cono i settori di carta SC*z*, *z*C*y*, *y*CS, e le porzioni spirali di ciascheduno di mano in mano nella superficie di quello riportare e scolpire. Onde seguita che anche in questo caso la *spirale conica* sarà eguale alla *spirale del piano*; e che o rotolando il cono sul fermo piano, o facendo volgere il piano sul fermo cono, traccierassi sulla superficie o dell'uno o dell'altro rispettivamente la già impressa spirale.

5. Già si è detto che un cilindro I*n* (*Fig.* 8. *Tav.* 5.) rovesciato sul piano, ed urtato nel centro della sua gravità rotolando naturalmente movesi per una retta. Conciossiacchè abbiam visto, che un cono rovesciato sul piano ed urtato nel centro della sua gravità, rotolando naturalmente si muove nella periferia di un circolo. Onde supposto che il centro suo fosse andato all'infinito, si moverebbe nella periferia di un circolo infinito. Ma un cilindro non è altro che un cono, di cui appunto il vertice sia andato all'infinito, e la periferia di un circolo infinito non è più che una retta. Dunque un cilindro rovesciato sul piano rotolando movesi per una retta. Inoltre a similitudine del cono per ciascheduna revoluzione spiega e distende la sua superficie sul piano in un settore, per così dire, infinito, cioè in un rettangolo (*Fig* 8. *Tav.* 5.) supponiamo *n*IA*d*, che

pra un cono; giacchè il cono non è altro, che una piramide d'infinite faccie. Nonostante immaginiamoci, che (*Fig.* 4. *Tav.* 5.) un cono rotolando sul piano, dopo un'intiera conversione fatta d'intorno al proprio asse, abbia spiegata la superficie in un settore, supponiam per esempio *n*C*d*, (che sarà a tutta l'area del circolo S*yz*, come CS lato del cono al raggio S*n* della sua base) indi dopo un'altra conversione in un altro egual settore *d*C*b*, poi in un altro ec. passando il lato del cono C*n*, che tocca il

pia-

che dovendo perciò pareggiare la superficie di esso, lo chiamo *rettangolo cilindrico*.

Siccome poi per incidere una spirale nella superficie di un cono con una retta I*m* (*Fig.* 4.) fu prima detta I*m* supposta verticale al lato di esso cono, che aveva i lati obliqui e convergenti. Ora perchè essendo il cilindro un cono prodotto all'infinito, ha i lati retti e paralleli, si adoprarà (*Fig.* 8.) quì pure la retta I*m*, non però verticale, ma anzi all'opposto messa obliqua al lato di esso, per la quale dico, che rotolando il cilindro verrà appunto tracciata una spirale sulla sua superficie. Perchè dopo la sua prima rivoluzione, ed il lato I*n* passato in A*d*, la retta I*m* toccarà il lato del cilindro in *t* punto vicino alla base *d* più che non è il punto I dopo la seconda revoluzione detta retta I*m* toccarà il lato del cilindro I*n* passato in F*b* in *b* punto più vicino alla base anche più di *t*. Onde risultarà primieramente che quanto maggior sarà l'angolo *n*I*m* (pur che sia minor di un retto) molte più saranno le spire, che verran sul rotolante cilindro tracciate dalla retta I*m*. 2. Il numero delle spire sarà eguale al numero dei *rettangoli cilindrici* segnati dalla retta I*m*, come era anche nel caso dei *settori conici* della *Fig.* 4. 3. Essendo impossibile definire sul piano un *rettangolo cilindrico n*I A*d*, perchè non si può giustamente rilevare la periferia della base del cilindro, si piegarà d'intorno ad esso una carta, che lo capisca, e circondi per l'appunto, quale distesa indi sul piano, supporremo ora che pareggi detto rettangolo *n*I A*d*; onde volendo poi segnare il cilindro di un numero di spire qualunque dato (in *Figura* sono 3) si ordinino per dritto altrettanti *rettangoli cilindrici*, e si tiri la retta I*m*, che detta spirale si conseguirà, o avvolgendo d'intorno al dato cilindro tutti i (3) *rettangoli cilindrici*, e le porzioni della retta I*m* di ciascheduno nella superficie di essi incidendo, o come comunemente si fa, piegandovi d'intorno un solo rettangolo, anzi i soli triangoli I*et*, *tob*, *bbm* in esso riportati. Imperciocchè le rette I*t*, *tb*, *bm* formaranno le tre spire, e tutte insieme la spirale. 4. Ancor quì risulta assai più leggiadramente che altrove, che scolpita in sulla superficie di un cilindro una spirale qualunque, ma che gli spazj tra una spira e l'altra siano eguali, rotolando il cilindro, sempre si spiegarà essa sul piano in una retta eguale anche in questo caso alla *spirale cilindrica*; e quando essa spirale non si distenda in una retta, certo è che non sono eguali gli spazj tra l'una e l'altra spira; e spiegarà sul piano rotolando una Curva.

piano nella prima ſtazione, paſſando, dico, da C*n* in C*d* poi ec. Ora ſe foſſe ſuppoſto che prima di muoverſi il cono, foſſe ad angoli retti del lato C*n* deſignato ſul piano un regolo I*m*, qual Curva tracciarebbe detto regolo ſulla ſuperficie del cono rotante, toccandolo di mano in mano in diverſi punti ſucceſſivi? Una ſpirale certamente che verſo la baſe del cono inclina, e gli ſpazj fra una ſpira e l'altra intercetti ſaranno eguali alle differenze, che ſono da CI a C*t*; da *ct* a *cb*; da *cb* a ec. Concioſſiacchè il lato C*n* paſſato in C*d* è dal regolo I*m* toccato in *t* punto alla baſe tanto più vicino, che non è il punto I, quanto *dt* è minore di *n*I. Il che ſe non foſſe, non ſolo *dt* ſarebbe o eguale, o maggiore di *n*I, ma anche l'angolo *dtm* ſarebbe o eguale, o maggiore dell' angolo *n*I*m*, che non può eſſere, perchè *d*C, *n*C ſono per la coſtruzione convergenti ſempre dalla medeſima parte di C. Finita poi la ſeconda revoluzione, ed il medeſimo lato C*n* (dopo eſſer ſtato in C*d*) traſferito in C*b*, ſarà da detto regolo I*m* toccato in *b*, punto alla baſe vicino anche più di *t* ec. perchè non ſolo *bb* è minore di *dt*, ma anche l'angolo *bbm* deve eſſer minore dell' angolo *dtm*, e molto più minore di *n*I*m*. Onde in ſomma il regolo I*m* deſcriverà ſulla ſuperficie del cono rotante l'accennata ſpirale. Ma ſe in vece che il cono volgaſi ſul piano immobile S*yz* affetto del regolo I*m*, s'immaginaſſe, come pur ora dicevamo, che diveniſſe mobile il piano, e giraſſe d'intorno al fermo cono; tanto ancora ne ſeguirebbe, e nè più, nè meno avrebbe il regolo I*m* a tracciar ſulla ſuperficie di quello la data ſpirale. Se per fine, preſcindendo poi col penſiero da tutta l'area del piano, come ſe non vi foſſe, ſi figuraſſimo che non altro, che quella parte bianca, che forma il regolo I*m*, rotaſſe intorno al fermo cono; nulladimeno quella traccia, che ſulla ſuperficie di eſſo tiene la parte I*m*, quando vien moſſa unita al ſuo tutto, è la medeſima che terrebbe diſgiunta. Con-

cioſſiacchè non perciò il cono reſti di non un eſſere cono; ed il regolo un piano; condizioni che, come ſi è detto, ſole concorrono ad un tal fatto produrre. E quindi finalmente concludo, che la devoluta *eb* (*Fig. 2. Tav. 6.*) non inſiſtendo eſattamente col margine *e* nella periferia del dato circolo generatore *eg*, non è nè meno ordinato l'Iſtromento a quei movimenti ſuppoſti neceſſarj alla deſcrizione della propoſta Cicloide.

RISOLUZIONE.

Ora per quanto ſembri grave queſta obbiezione, pure riſolvendola di leggiero, forſe avverrà che la preſente coſtruzione acquiſti maggior riputazione e chiarezza; e perciò, oltre che la forma del cilindro *bd* trattiene ſufficientemente il regolo *eb* della *devoluta* nel ſuo conveniente ſito, e che quand' uopo foſſe, nè meno mancarebbero altri ripieghi, è poi ſtato anche un opportuno avvedimento il far sì, che il detto regolo *eb* non toccaſſe la ſuperficie del tronco cono, ſe non con un angolo *e*, il quale formando però per il lungo di eſſo regolo non già un piano, ma una linea, queſto non foſſe in fatti ſtato atto a creare l'accennata difficoltà, e rendere almen per queſto capo imperfetto l'Iſtromento. Alla dichiarazione del quale ſia quì poſto fine.

ISTRO-

ISTROMENTO VII.

PER LE OVALI DI CARTESIO APPLICATE ALLE REFRAZIONI.

ARTICOLO PRIMO.

Descrizione organica di dette Ovali.

PAre in certo modo, che mal si convenga il nome d'Istromento ad un filo, che solo (1) adopera nella descrizione delle Curve proposte; ma io stimo all' opposto, che tanto più le stia bene, quanto n'è più spedito l'uso, e più esatto ne risulta l'effetto. Se dunque si concepisce, che (*Fig.* 7. *Tav.* 8.) appunto un filo sia con una estremità legato ad un pivolo P fitto nel piano, e quindi condotto verso un altro pivolo F pure fitto nel piano, vi s'avvolga d'intorno, e poi in M, ovvero *m* vada a finire, dove abbia connesso uno stilo mobile così, che mentre tenuto ben teso, e con la mano guidato urta nella porzione di detto filo PF, il filo sul pivolo F sdrucciolando, tanto (*Fig.* 1, 2, 3) l'esteriore porzione PMF si aumenti, quanto scema l'interiore FM; lo stilo M tendendo verso B descriverà una Curva AMB di un tal genere, che principalmente abbraccia, oltre le *sezioni coniche*, ed altre Curve, anche le *Ovali Cartesiane*; e di cui al fine del seguente Articolo con due lettere scrittemi a questo proposito dal Chiarissimo P. Ruggiero Boscovich si darà una notizia minuta più, che non contiene il mio Testo. Per altro questa costruzione è tanto semplice, che si può ben credere, che io sia per averne fatte mille prove.

(1) Il mio metodo di descrivere codeste Ovali ha questo particolare vantaggio sopra quello del Cartesio, che per il mio basta un semplice filo, dove che egli adopera nel suo un filo applicato ad un regolo, e però la costruzione risulta più composta.

ARTICOLO SECONDO.

Per quai modi variando queste Curve diventino le Ovali Cartesiane.

Essendo pertanto (*Fig.* 1, 2, 3. *Tav.* 8.) semplice il filo in PM, e raddoppiato in MF, la essenziale proprietà della Curva sarà, che condotte dai due fochi P, F a qualunque suo punto M due rette PM, FM, l'aggregato della prima insieme col doppio dell'altra sia eguale ad una lunghezza costante, cioè alla lunghezza del filo. E però presa col compasso detta lunghezza, e fatto centro in P (*Figure suddette*) si descriva il circolo DHC, cui in H occorra la prodotta PM. Ora sarà MH doppia della retta MF; sarà questo caso particolare di un altro più generale, in cui sia FM ad MH in qualunque data ragione; e la periferia CHD sarà la direttrice, sulla quale dal raggio PH vien condotto il punto H. Onde se fosse il circolo infinito, la periferia direttrice diventarebbe una retta, ed avrebbero quì luogo anche le *sezioni coniche*. Ma quantunque il filo non si possa comporre ad una direttrice retta: non ostante anche nel solo supposto della direttrice circolare possono variare queste Curve assaissimo in due maniere.

Primieramente se, mantenendosi la ragion data da PM ad MF (cioè nel caso nostro di 1 a 2, perchè il filo in PM è semplice, e raddoppiato in MF) si muti la sola posizione del foco F rispetto al foco P, cosicchè accada, che la porzione del filo FM sia ora maggiore della distanza de' fochi PF, la quantità P*m* (*Fig.* 7. *e* 1. *Tav.* 8.); ora minore la quantità PM (*Fig.* 7. *e* 3.); ora eguale (*Fig.* 7. *e* 2.); e nei due primi casi, principalmente quando sia piuttosto piccola la differenza (*Fig.* 7.) di FP ad F*m*, ovvero M, verranno descritte bellissime sezioni di un Uovo da me già promesse nel luo-

luogo delle Concoidi. Nel terzo caso poi, cioè quando (*Fig.* 7.) la porzione FM sia eguale alla porzione FP risulta appunto una *Concoide di base circolare* BMP (*Fig.* 2. *Tav.* 9.) di cui la base è PXZ; le intercette sono ZB, XM ec. al raggio BZ eguali, ed il polo P è situato nella periferia direttrice, e questa *Concoide* è dal Sig. di Roberual chiamata: *Le Limaçon di M.r Pascual*. Curva soggetta all' Istromento delle Concoidi.

Secondariamente, lasciando ferma la posizione dei fochi F, e P, variano queste curve per lo variar della ragione di PM ad MF; onde potendosi il filo ordinare a molte ragioni, che siano però di numero a numero, si estende la sua operazione anche alle *Ovali di Cartesio*, perchè, confrontando con queste le applicate da lui alla Diottrica e Catottrica, si intende, che, acciò i raggi partiti da un dato punto P vadono ad unirsi nel punto F, dopo la rifrazione nella superficie generata da una Curva che si cerca, non si hà che a raddoppiare tante volte il filo in MF, quanto esprime il numero del seno dato d'incidenza, ed in MP quanto esprime il numero del dato seno di rifrazione. Onde acciò i raggi per esempio dal luminoso punto P diffusi, e dall'aria in una superficie di vetro rifratti, si raccolgano nel punto dato F, la superficie di vetro dovrà esser generata da una Curva, la quale (perchè nel vetro dall'aria il seno d'incidenza al seno di rifrazione è come 3 a 2) allora si descriverà quando, come nella *Fig.* 4. *T.* 8., il filo in FM*i* sarà triplicato, e duplicato in M*i*P.

Lette-

Lettera 16. Marzo 1748. scrittami dal Chiariss. P. Ruggiero Boscovich della Compagnia di Gesù in proposito delle *Ovali Cartesiane*.

PROBLEMA.

D*Ue estremità di un filo* (Fig. 1, 2, 3, Tav. 9.) *sieno fisse una in* P *sul piano della carta, e l'altra sullo stilo mobile* M, *in modo che lo stesso filo più lungo si avvolga intorno allo stesso stilo* M *e passi fino a un pivoletto pur fissato nella carta in un punto* F, *intorno a cui si avvolga, tornando allo stilo* M. *Girato ora lo stilo* M *in modo, che sempre tenga teso il filo, si cerca la natura della Curva che descriverà.*

Il filo in PM *sarà semplice, ed in* MF *raddoppiato. Onde la proprietà essenziale della Curva sarà, che da due fochi* P, F *menate a qualunque suo punto* M *due rette, la somma della prima insieme col doppio della seconda sia eguale ad una lunghezza costante, cioè alla lunghezza del filo.*

Fatto centro in P *coll'apertura della lunghezza del filo sia il circolo* DHC, *che incontri in* D, C *la retta menata per* PF, *e prodotta la* PM *fino al medesimo circolo in* H, *dovrà essere* MH *il doppio di* MF. *Quindi si vede che questa Curva è un caso particolare di un altro assai più generale, in cui sia* FM *ad* MH *in data ragione. Si potrà questo caso generale esprimer anche così: Dato un punto* F *comunque, e un cerchio* DHC *qualunque trovar la natura di una Curva tale, che tirata da qualunque suo punto* M *una retta* MF, *al dato punto* F, *e un'altra* MH *perpendicolare alla periferia del dato circolo, sia la prima alla seconda in data ragione.*

In quest'aria si vede subito la relazione, che queste Curve hanno colle sezioni Coniche. Nelle sezioni Coniche vi è una retta direttrice tale, che tirata da qualunque punto della Curva una retta a un fuoco, ed un'altra alla direttrice, sia la prima alla se-

seconda in data ragione, la quale se sia ragione di minore diseguaglianza si avrà l' Elisse, se di eguaglianza si avrà la Parabola, se di maggiore diseguaglianza si avrà l' Iperbola. Sicchè queste Curve differiscono dalle sezioni Coniche col avere per direttrice una periferia circolare in cambio di una retta. Se la direttrice di quelle si avvolge in un circolo, quelle si mutano in queste, e all'opposto se il circolo di queste diviene una retta, queste divengono sezioni Coniche. Anzi di più si vede, che le sezioni Coniche sono un caso particolare di queste Curve più generali. Basta in queste far, che il centro P vada all' infinito, e questo caso particolare dà subito le sezioni Coniche; ed è cosa graziosa il vedere come in questo modo anche l'Elisse è una di queste Curve, la quale buttandosi il circolo in una retta divien Parabola. Se la ragion data sia d' eguaglianza sarà FM eguale ad MH e però la somma di PM, MF eguale alla Costante PH e la Curva verrà Elisse. Se il circolo diviene una retta, va il centro P all' infinito, e l' Elisse si muta in Parabola. Onde l'Elisse si muta in Parabola, e la Parabola in Elisse anche col solo considerare, che la direttrice divenga retta dall' essere circolare, o si avvolga in circolo dall' esser retta.

Di qui si vede, che il trattare di queste Curve porta assai più che il trattare delle sezioni Coniche, essendovi dentro tutte quelle in un sol caso particolare, e infinite di più. E così ogni Curva è un argomento d' innumerabili ricerche, e si vede quanto è limitata la nostra mente, quanto povera e ceca la nostra Geometria. Cosa poi sarebbe, se per direttrice si pigliasse qualunque altra Curva? Quanto più crescerebbe il numero delle Curve, e quanto più secondo sarebbe il caso? e se qualunque funzione di MF a qualunque di MH dovesse assere un qualunque rapporto esposto comunque, quanto più in là si andarebbe?

Io qui solo mi restringerò a darne la costruzione geometrica per punti, e a tirar le tangenti. Darò l' equazione

ne

ne caverò alcuni Corollarj, distinguerò alcuni casi, e mostrerò, che in alcuni vengono alcune Curve particolari già cognite.

Si prenda PE *a* PC *nella data ragione, e col centro* P *coll' apertura* PE *si faccia un circolo, che incontri la* DC *in* G, E. *Da qualunque punto* H *del circolo* DHC *pel centro* P *si tiri una retta indefinita, e un' altra pel punto* F. *Se questa seconda incontra il circolo* GE *in qualche punto* I, i, *si tirino le due rette* PI, Pi; *indi da* F *due parallele* FM, Fm *alle medesime, e se queste incontreranno la* HP *in* M, m, *saranno i due punti* M, m *alla Curva cercata. Imperocchè sarà* FM *ad* MH, *come* IP *a* PH, *cioè come* PE *a* PC *in ragion data, e la stessa è la dimostrazione per* m.

E' chiaro, che rispetto al punto H *non vi saranno altri punti, che i così determinati, perchè dovendo essere* PE *a* PC, *come* FM *ad* MH, *come* IP *a* PH, *ed essendo* PH *eguale a* PC, *sarà* PI *eguale a* PE, *e però* I *nel circolo descritto col raggio* PE. *Onde se si concepirà girare la* PH *intorno a* P, *descrivendo* H *tutta la circonferenza del circolo, e facendosi sempre la stessa costruzione; i punti* M, m *descriveranno tutta la Curva cercata senza lasciarne fuori alcun punto. Inoltre non potendo la retta* HF *incontrar il circolo in più di due punti; per conto del punto* H *non vi potranno essere più di due intercezioni della retta* HP *sulla curva. Ma come la stessa retta prodotta divien di nuovo perpendicolare al circolo dalla parte opposta; potranno esservi due altri punti, le perpendicolari de' quali si terminino a quest' altra estremità. Che se la retta* HF *sarà tangente del circolo* GIE *concorrendo i due punti* I, i *in un solo; sarà ancora la* HP *tangente della Curva, la qual cosa potrà accadere quando il punto* F *non sia dentro al circolo* GIE, *come nelle* Figure 2. *e* 3., *e se la retta* HF *non incontrerà il circolo* GIE, *nella retta* HP *non vi sarà alcun punto alla Curva per conto del punto* H.

Dall' essere i due semicircoli di qua e di là dalla DC *affatto eguali e simili, si vede che essa dividerà la Curva in*

in due parti eguali e ſimili, e ſarà un aſſe, il quale incontrerà la Curva ne' punti AB, ab *dati. Mentre deve eſſere* FB *a* BC, FA *ad* AD, Fb *a* bc, *e* Fa *ad* aC, *come* FE *ad* FC *in ragione data.*

Ora in due maniere principalmente ſi poſſono variare queſte Curve: Prima, mantenendoſi la ragion data di PE *a* PC, *e variandoſi la poſizione del punto* F *riſpetto al circolo* GIE, *ed eſſendo or dentro detto circolo, come nella* Fig. 1., *or nella periferia, come nella ſeconda, ora fuor del circolo, come nella terza. La ſeconda variandoſi la ragion ſteſſa.*

Le prime variazioni ſono delineate nelle 3. figure colla ragion di uno a due. Qualunque ſia la ragione, nel primo caſo ſempre la retta HF *incontrerà il circolo* GIE *in due punti. Onde ſempre ſi trovaranno due punti* M, m. *Anzi perchè i due punti* I, i *giaceranno di qua e di là da* F, *anche i due* M, m *giaceranno di qua e di là da* P; *e però uno de' due, come* M *verſo* H, *e l'altro come* m *dalla parte oppoſta. Quindi la ſomma di* PM *e di* MH, *che alla* MF *ſta in data ragione, ſarà eguale alla coſtante* PH, *ma delle* Pm, mH *lo ſarà ſolamente la differenza; o pur anche la ſomma, ſe la* Pm, *che va verſo la parte oppoſta di* PM, *ſi conſideri, come negativa; giacchè la ſomma di un negativo porta ſottrazione. Quindi nel girare la* PH, *e il punto* H, *i punti* M, m *deſcrivono due perimetri di Curva, ciaſcun de' quali, dopo l'intero giro di* H, *torna a ſe ſteſſo: ma il ſolo deſcritto da* M *ſarà quello, che deſcriverà lo ſtilo nel caſo propoſto.*

Solo nel caſo che la ragion data ſia ragione d'egualità, il punto i *va in* H, *e diventando* FM, HP *parallele, il punto* m *va all'infinito, e non vi è più: onde nel caſo che la Curva deſcritta dal punto* M *diventi* Eliſſe *Conica, il ramo compagno deſcritto dal punto* m *va in infinito e non vi è più: e nel caſo in cui il punto* F *vada in* P, *rimane data tanto la ragione di* PM *ad* MH, *quanto la ragione di* Pm *ad* mH, *giacchè rimangono le* FM, Fm *eguali alle*

PM, Pm. *Quindi rimangono date le* PM, Pm, *e i due rami divengono due circoli: e ſimili trasformazioni varie vi ſono ne' caſi ſeguenti ancora.*

Nel ſecondo caſo in cui il punto F *cade in* E *nella circonferenza del ſecondo circolo, tirate le* HP, HF, *la ſeconda incontrerà il circolo in* F, *e in* I *generalmente; onde uno dei punti della Curva anderà ſempre in* P, *e vi ſarà generalmente un altro* M. *Se per* F *ſi tiri* VFu *perpendicolare all'aſſe. Queſta ſarà tangente del circolo* GIF, *e però tanto* VP, *quanto* uP *ſaranno tangenti della Curva in* P; *talmente che girando* H *da* C *fino ad* V, *girerà* I *per il ſemicircolo* GIE, *e il punto* M *deſcriverà un mezzo nodo* BMP, *quindi andando* H *in* h *per l'arco* VhD, *anderà* I *in* i *per il ſemicircolo* FIG, *e il punto* m *deſcriverà l'arco* bma, *e ſeguitando* h *per* Du *prima, indi per* uC, *ſi deſcriverà il reſto* aPB, *ſcorrendo* l'I *il circolo un' altra volta. Così verrà una Curva che ſegherà ſe ſteſſa in* P, *ed avrà un nodo, deſcrivendoſi il nodo nel giro di* H *per* uCV, *e in un' intera revoluzione di* I *pel circolo* GIE, *e il reſto nel giro di* h *per* VDu, *e in un altro giro di* i *per lo ſteſſo circolo.*

Nel terzo caſo tirate per F *le due tangenti* VZu, Nzn *al circolo* GIE; *tutti i punti* Hz *preſi nell' arco* Vn, *che ſta nello ſteſſo angolo* VFn, *in cui il circolo* GIE, *ſerviranno per trovare due punti per ciaſcuno al ramo* AMz mz aA; *tutti i punti preſi nel* NHiu *ſerviranno per trovare due altri punti per uno al ramo* BMi mi b; *giacchè le rette da eſſi tirate per* F *ſempre urteranno in due punti del circolo* GIE. *Per l'oppoſta ragione è manifeſto, che i punti degli archi* NV, nu *non ſerviranno. Le rette poi* PN, Pu *toccheranno in qualche luogo in* X, *e in* x *il ramo* BMiB, *e le rette* VP, nP *toccheranno in qualche luogo* S, ſ *il ramo* AMz aA; *e coll' ajuto de' punti* VN, un, *e della ſoluzione generale ſi troveranno i contatti.*

Per

Per trovare cosa accaderà a vertici degli assi AB, ab, *basta vedere come i medesimi si determinino. Si trovano* A, *e* B *segando* FD *ed* FC *in ragione di* AE *ad* AC, *sicchè il punto* B *starà da* F *verso* P, *e verso la parte contraria, secondo che il punto* F *starà fuori del circolo* DHC, *o dentro, il quale secondo caso mostrano tutte trè le figure. Il punto* A *starà verso la parte contraria di* F *rispetto a* P, *o in* P, *o verso* F, *secondo che sarà il punto* F *dentro al circolo* GIE, *come nella* fig. 1.; *o nella sua circonferenza come nella* fig. 2.; *o fuora come nella* fig. 3. *Imperocchè essendo* FA *ad* AD, *come* PE *a* PD, *dovrà il punto* A *segare la* FD *in una ragione maggiore, eguale, o minore della ragione di* FP *a* PD, *secondo che sarà* PE *maggiore, eguale, o minore di* PF, *e però giacere di là da* P, *in* P, *o più vicino a* F. *Pigliandosi* a *fuori della* FD *in modo, che sia* Fa *ad* aD *in ragione di* PE *a* PC, *se sarà* PE *minore di* PC *giacerà rispetto ad* F *dalla parte opposta di* P; *se sarà* PE *eguale a* PC, *andarà* a *all' infinito; se maggiore, dovrà cadere nella* FD *prodotta dalla parte di* D. *Dovendosi pigliare* b *in modo che stia fuori della* FC, *e sia* Fb *a* bc *nella stessa ragione; il punto* b *giacerà da* F *verso* P, *anderà all' infinito, ò caderà di là da* C, *verso dove ora nella figura cade l'* a, *secondo che sarà parimente la* PE *minore, eguale, o maggiore della* PC; *e nel primo caso espresso dalle figure caderà di là da* P *rispetto ad* F, *in* P, *o verso* F, *secondo che la ragione di* Fb *a* bC *sarà maggiore, eguale, o minore della raggione di* FP *a* PC, *cioè secondo che la* PE, *sarà maggiore di* PF, *come lo è nel primo caso della* fig. 1.; *o eguale come nel secondo nella* fig. 2.; *o minore come nel terzo nella* fig. 3.

Quindi nella fig. 1. *stando fermi i due circoli, e stando* F *in* P, *i due rami sono circoli anch' essi. Camminando* F *verso* E, *si muta la loro forma, e i punti* bA, *si accostano a* P, *e fra loro; e i punti* B,a *se ne scostano, e si scostano fra di se; ma* B *si accosta ad* F, *ed a se ne scosta. Nell' atto che*

il punto F arriva in E si muta la figura prima nella seconda. I punti bA vanno in P; e i due rami formano una curva continua, che si sega, dove quei si attaccano; dovendo a tal fine nella fig. 1. in A crescere la curvità all' infinito prima dell' attacco, e in b rientrare la Curva in dentro con flesso contrario, giacchè amendue non potendo mutare la direzione per salto in A, e in b, devono fare da ambe le parti colla tangente lo stesso angolo, e aver la tangente comune, che essendo perpendicolare all' asse quando erano circoli, si deve esser mantenuta tale; onde in A, e in b deve sempre necessariamente essere la curva perpendicolare all' asse; ma per non finire per salto nella punta b, nel momento in cui già ivi l' arco di un ramo si continua coll' arco dell' altro, onde già fa l' angolo obliquo coll' altro arco suo, deve essere cresciuta la curvità nella fig. 1. nella punta A assotigliata verso b, e nella b assotigliata in dentro verso A per tutti i gradi fino all' attacco, e al rompimento e mutazione di continuazione, che si fa nell' arrivare il punto F in E.

Passando il punto F di là da E fuor del circolo, si stacca di nuovo l' un ramo dall' altro, e la fig. 2. va nella 3., ma il punto b già ha passato l'A, e non appartengono più i punti A, B al ramo istesso quantunque in A si seghi la FD, e in B la FC, come prima, in data ragione di PE a PC. Ma in quell' attacco della fig. 2. si sono cambiati i vertici, essendo passato b nel ramo di B, e A nel ramo di a; come appunto anche le due intersezioni M, m regolate dallo stesso punto H appartengono ambedue allo stesso ramo, dove nella fig. 1. appartenevano uno per ramo. Che se così camminando F arriva in C, si uniscono all' ora i punti FBC insieme, anzi annullandosi l' arco Nu, va in F in un punto tutto il ramo BMi mi bxB. Indi passando F più oltre, rimane ad ogni modo il B fra F, e C, e però F di là da B ancora passandolo, mentre passa C, ed entrando B nello spazio FP, all' opposto a C passa dove prima era B, e ogni punto M verso la parte contra-

traria di prima, capovoltandosi tutto il ramo, nel quale in quel caso rimane ogni Mi, mi *fuori del circolo, e le* H Mi, H mi *negative; onde la differenza di* FM, MH *viene allora eguale al filo, e non ha luogo la descrizione della Curva coi fili. Vanno di poi crescendo amendue i rami, e coll' andare* F *all' infinito si perdono anch' essi nell' infinito.*

Tornando indietro F *verso* E *nella* fig. 3., *i punti* VN, un *si vanno accostando impiccolendosi gli archi inutili* VN, un; *finchè all' arrivo di* F *in* E *si riducono le* Vu, Nn *alla sola* VFu *della* fig. 2. *e rientrando* F *nel suo circolo nella* fig. 1. *ogni tangente menata per* P *svanisce; onde* 4. *rette menate dal centro* P *toccano le Curve nel caso terzo,* 2. *nel caso secondo, e niuna nel primo.*

Tenendo ora fermo il punto F *vada mutandosi il solo punto* E. *Se esso nella* fig. 3. *si unisce a* P, *amendue i rami vanno in un punto solo in* F, *perchè annullandosi la ragione di* Fm, *a* MN, *e stringendosi l' angolo* NFu, *e* nFV *all' infinito, si annulla ogni* FM1, FM2. *Camminando* E *verso* C *crescono amendue i rami, finchè arrivando* E *in* F *si uniscono nella* fig. 2. *Passando oltre il punto* E, *si va nella* fig. 1., *dove accostandosi* E *verso* C, *e andando la ragion data verso l' egualità; vanno le rette* PA, FB *accostandosi all' eguaglianza, e la forma del ramo* AMB *alla forma di un'* elisse. *E intanto i punti* ab, *e tutto il secondo ramo si scostano alle infinito. All' arrivo di* E *in* C, *diviene il raggio interiore una vera* elisse; *svanisce l' esteriore, nè vi è più. Che si il punto* E *va fuora di là da* C, *e la ragione diviene di maggiore diseguaglianza, i vertici* a, *e* b *mutano le parti andando* a *di là da* D, *e* b *di qua da* C, *con un capovoltarsi molto ordinario nelle trasformazioni de' luoghi geometrici. Anzi allora ogni punto* m *va dalla parte di* H *nella* PH *prodotta. Andando innanzi* E *all' infinito, si scemano la* MH, *e la* mH (*che già si trova fuor del circolo dalla parte di* H) *all' infinito; e però amendue i rami si accostano all' infinito*

al

al circolo, in cui vanno a terminare quando il raggio CE *diviene infinito*.

Ma se queste mutazioni della ragione si facciano collo scemare il raggio PC, *succede lo stesso, cioè nell' accostarsi* C *ad* E *va il ramo esteriore in* eliffe *nell' arrivo di* C *in* E. *Indi torna il ramo esteriore dall' infinito, ma capovoltato, e all' arrivo di* C *in* F, *va in* F *anche il* B; *e scemando sempre più il raggio* PC, *si scema il ramo* AMB, *e all' arrivo di* C *in* P *vanno in* P *i punti* AB, *e tutto il ramo tanto interiore, quanto esteriore; giacchè la ragione di* FM *ad* MH, *cioè in quel caso ad* MP, *e di* FM *ad* mH, *cioè ad* mP *dovrà essere infinita, e però le* PM, Pm *nulle*.

Ora è tempo di dar un' occhiata a una elegantissima maniera di determinar le tangenti. Si faccia l' angolo MFR, *o* mFr *verso* H *eguale ad* FHM, *e si tiri per* M *la retta* SMT *perpendicolare alla* FR, *che sarà la tangente, e allo stesso modo* mts *perpendicolare alla* Fr.

Per dimostrar questo metodo, e non intrigar la figura si è cavata parte di essa fig. 1. *a fianco a man dritta. Sieno* MV *due punti infinitamente vicini del perimetro della Curva, e co' centri* FP *sieno gli archetti* VX, VY, *che taglieranno la* MY *incremento della* PM *andata in* PV, *e decremento della* MH *andata in* Vh, *e la* MX *decremento della* FM *andata in* FV; *e per essere* FV *ad* Vh, *come* FM *ad* MH, *sarà anche levando proporzionali da proporzionali* MX *ad* MY *nella stessa ragione di* FM *ad* MH. *Ora gli archetti* VX, VY *scemando all' infinito, si potranno prendere per linee rette perpendicolari alle rette* FM, PM; *onde se inoltre si tiri* FT *perpendicolare alla retta* MV *prodotta, la quale incontri la* PM *in* R, *sarà il quadrilineo* FXVT *per gli angoli* X, *e* T *retti in un circolo, e il quadrilineo* RYVT *parimente in un circolo per gli angoli* T, *e* Y *retti. Quindi saranno i rettangoli* FMX, RMY *eguali ciascuno a* TMV, *e però anche fra loro; onde sarà* MR *ad* MF, *come* MX *ad* MY, *cioè*

come

come FM *ad* MH*; e però i triangoli* RMF, FMH *simili, e l'angolo* RFM *eguale all'angolo* FHM, *la qual cosa si verificarà accuratamente, quando i punti* V *ed* M *coincidano, e la* MT *divenga una tangente. La dimostrazione pel punto* m *è la stessa.*

Quindi si vede, che anche non avendo il circolo DHC, *ma la sola Curva, e quella ragion data; basta produrre* PM *in* R *in modo, che sia* MR *ad* MF *in quella ragion data, e tirata* FR, *menare una perpendicolare alla medesima, che sarà la tangente cercata.*

Si vede inoltre, che in tutti que' vertici dell' asse, che non saranno in P, *come lo è il vertice della attaccatura* Ab *della* fig. 2.*: sempre le tangenti saranno perpendicolari all' asse. Benchè sempre la* MR *caderà sull' asse; e però la* FR *coinciderà coll' asse, e converrà che la tangente sia perpendicolare all' asse medesimo. L'unico caso, in cui la dimostrazione generale non cammina è quando il punto* M *va in* P, *il che può accadere nella* fig. 2.*; perchè allora non andando il punto* M *fuori di* P *nell' asse, può la* PH, *e però la* FR *avere qualunque direzione, e conviene trovar quella, in cui* PM *svanisce andando* M *in* P, *il che accade quando l'* H *vada in* V, *o in* u, *dove anche con questo metodo si troverebbe la tangente, che già si è trovata di sopra essere la stessa* PV, Pu*; cosa che anche di qua facilmente si ricavarebbe.*

Finalmente si noti che, se la ragion data fusse ragion di egualità, sarebbe il triangolo FMR *isoscele, e la tangente segarebbe per mezzo l'angolo* FMR, *come accade nella* elisse conica.

Quando la ragione di FM *ad* MH *è di unità a numero, che sia* n, *come lo è nel caso de' fili; i punti* M *si trovano più facilmente così. Prese* (Fig. 1. Tav. 9.) PC, PD *eguali alla lunghezza del filo, divisa la* FC, *e la* FD *in parti* n + 1, *si piglino* FB, *ed* FA *verso* C, *e* D *eguali ad una di*

di dette parti. Indi divise le stesse in parti n − 1, *si piglino* Fb, Fa *verso le parti opposte eguali a una di esse: così si troveranno i vertici; mentre sarà* FB *a* BC, *e* FA *ad* AD, *come pure* Fb *a* bC, *ed* Fa *ad* aD, *come* 1 *ad* n. *Poi presa* FO *eguale alla lunghezza del filo, e fatto centro in* F *con qualunque apertura, che stia in mezzo tra la* FA, *e la* FB, *si faccia un arco di cerchio verso* M, *indi la medesima apertura si trasporti da* F *verso* O *numero di volte* n, *finchè si arrivi a qualche punto* Q; *si prenda* OQ, *e col centro in* P *con detta apertura* OQ *si faccia l' interfezione coll' arco di prima in* M, *e così si troveranno sempre due punti* M *di qua, e di là dell' asse molto accuratamente. Lo stesso si farà per li punti* m *pigliando le aperture* Fm *medie fra* Fb, Fa, *e arrivando in* q. *La dimostrazione è tanto facile che si vede da se.*

Passando ora a determinare l' equazione, il metodo è facile. Tirata ML (Fig. 1. Tav. 9.) *perpendicolare all' asse si ponga* PE = n, PC = m, PF = a, PL = x, LM = y, PM = $\sqrt{xx+yy} = z$. *Sarà per la* 13. *del lib. II. di Euclide.* $FMq. = FPq + PMq - 2FP \times PL = aa + zz - 2ax$. *Onde facendo come* n. m :: $FM = \sqrt{aa+zz-2ax}$. $MH = \frac{m}{n}\sqrt{aa+zz-2ax}$, *si avrà* $PM + MH = z + \frac{m}{n}\sqrt{aa+zz-2ax} = PH = m$. *Quindi* $m - z = \frac{m}{n}\sqrt{aa+zz-2ax}$, *e però* $mm - 2mz + zz = \frac{mmaa}{nn} + \frac{mmzz}{nn} - \frac{2mmax}{nn}$; *cioè ripulita questa equazione* $(mm - nn)zz - 2mmax + 2nnmz + mmaa - nnmm = 0$. *In questa sostituendo per* zz *il suo valore* xx + yy, *trasponendo* 2nnmz, *indi quadrando, e risostituendo per* zz *il valor suo, viene l' equazione per* x, *e* y, *che verrà di quarto grado. Onde si vede, che queste sono Curve di terzo ordine.*

Ma

Ma intanto giova prima contemplarla alquanto così con z. *Se sia* $m = n$, *svanisce* $(mm - nn)zz$, *e resta il tutto divisibile per* m, *rimanendo solo* $- 2max + 2nnz + m(aa - nn) = 0$. *D'onde si cava* $2mnz = m(nn - aa) + 2amx$, *e di qui, quadrando viene l'equazione all'* elisse, *dopo di avere sostituito per* zz *il suo valore* $xx + yy$.

Se sarà $a = n$, *che è il caso della* fig. 2., *svanirà l'ultimo termine* $mmaa - mmnn$, *e si avrà* $(mm - nn)zz - 2mmax + nnmz = 0$. *Ora di qui si cava, che questa Curva è la stessa, che la* Concoide, *in cui la base sia un circolo, e il polo nella circonferenza. Imperocchè sarà* $(mm - nn)zz = 2mmax - 2nnmz$. *Onde* $z = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z} - \frac{2nnm}{mm-nn}$. *Posto questo si piglj* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$, *e si faccia attorno a un tal diametro un circolo, che dalla* PM *venga incontrato in* X. *Sarà per l'angolo* PXZ *retto*, $PM = z . PL = x :: PZ = \frac{2mmn}{mm-nn} . PX = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z}$. *Onde essendo tutta* $PX - XM = PM = z$, *sarà* $XM = \frac{2nnm}{mm-nn}$. *Dunque è dato il diametro* AZ *di un circolo, e da qualunque* PX *levata una* XM *costante, si trova il punto* M, *che sarà a una concoide circolare, che avrà per base un circolo, e per polo un punto nella sua circonferenza. La dimostrazione vale anche per* m *chiamando* $Pm = -z$. *Che se essa si chiamasse* $+z$ *si avrebbe* $mb + bh = z + m = \frac{m}{n}\sqrt{nn + zz - 2nx}$, *e però rifacendo il calcolo si trovarebbe* $z = \frac{2mmn}{mm-nn} \times \frac{x}{z} + \frac{2nnm}{mm-nn}$; *e posto lo stesso diametro* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$; *si avrebbe la linea* Xm *presa in fuora eguale al valor medesimo* $\frac{2nnm}{mm-nn}$.

 Da

Da questa riflessione nasce un modo assai più facile per trovare questo nuovo circolo, e descriver la Curva. Trovato il punto B, *ed* a, *come sopra, si segbi la* Ba *in mezzo in* Z, *e col diametro* PZ *si faccia un circolo; indi si giri una riga* PMX *attorno a* P *pigliando sempre il punto* M *da* X *verso* P, *e un altro in fuora coll' apertura* BZ, *e sarà fatto. Si noti solo, che essendo il diametro* $PZ = \frac{2mmn}{mm-nn}$, *e la* $ZB = \frac{2nnmm}{mm-nn}$ *sarà anche* PZ.ZB :: m.n. *Inoltre essendo* $PB = \frac{2mmn-2nnm}{mm-nn}$, $Pa = \frac{2mmn+2nnm}{mm-nn}$ *sarà quella* $= \frac{2mn}{m+n}$, *e questa* $= \frac{2mn}{m-n}$; *onde saranno* AB. Aa :: m−n . m+n, *cosa che anche direttamente si mostra con facilità.*

Se nella equazione generale $(mm-nn)zz-2mmax+2nnmz+mmaa-mmnn=0$ *divenga* $a=0$, *indi* $a=m$, *a infinito, o se* m, *o* n *si mutino dal zero all' infinito; si avranno tutte le vicende, e le trasformazioni vedute di sopra. Dall' equazione* $(mm-nn)zz-2mmax+2nnmz+mmaa-mmnn=0$ *generale, si ricavano facilmente i vertici degli assi. Si ponga prima* $x=z$, *indi* $x=-z$, *e si avranno i casi ne' quali le* AL, AM *si eguagliano, cioè in cui il punto* M *va nell' asse. Si avranno due equazioni* $(mm-nn)zz-2mmaz+2nnmz+mmaa-mmnn=0$, *ed* $(mm-nn)zz+2mmaz+2nnmz+mmaa-mmnn=0$, *e dividendo per* $mm-nn$ *si avrà* $zz+\frac{2nnm\mp 2mma}{mm-nn}z+\frac{mm}{mm-nn}(aa-nn)=0$; *dalle quali si possono ricavare i quattro valori cercati di* z, *che colla geometria semplice più facilmente si sono ricavati.*

Prima di pulire l' equazione generale si avverta, che se si cerchi la curva, in cui dati due numeri h i *qualunque intieri o rotti, razionali o irrazionali sia* $h\times PM+i\times MF$ *eguale*

le a una costante; dividendo per h *si avrà* $PM + \frac{i}{h} MF = \frac{e}{h}$. *Onde fatto* $\frac{i}{h} = \frac{m}{n}$, $\frac{e}{h} = m$, *sarà* $PM + \frac{m}{n} MF = m$ *; onde torna lo stesso caso.*

Per pulire poi l'equazione dai z, *si dica* $mm - nn = rr$, $aa - nn = cc$, *e in cambio di* $(mm - nn)zz - 2mmax + 2nnmz + mm(aa - nn) = o$, *si avrà* $rrzz - 2mmax + 2nnmz + mmcc = o$, *e trasponendo* $2nnmz$, *si avrà* $rrzz - 2mmax + mmcc = -2nnmz$, *e però quadrando.* $r^4z^4 - 4r^2m^2axz^2 + 2m^2r^2c^2z^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4c^2ax + m^4c^4 = 4n^4m^2z^2$, *e quindi trasponendo* $r^4z^4 - 4r^2m^2axz^2 + (2m^2c^2r^2 - 4n^4m^2)z^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4c^2ax + m^4c^4 = o$. *Si faccia* $2m^2c^2r^2 - 4n^4m^2 = t^6$, *e verrà* $r^4z^4 - 4r^2m^2axz^2 + t^6z^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4c^2ax + m^4c^4 = o$. *Sostituendo ora* $x^2 + y^2$ *per* z^2, *si avrà* $r^4x^4 + 2r^4x^2y^2 + r^4y^4 - 4m^2r^2ax^3 - 4m^2r^2axy^2 + t^6x^2 + t^6y^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4a^2cx + m^4c^4 = o$, *e dividendo per* r^4 *verrà finalmente l'equazione pulita come segue:* $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - \frac{4m^2a}{r^2}x^3 - \frac{4m^2a}{r^2}xy^2 + \frac{t^6}{r^4}x^2 + \frac{t^6}{r^4}y^2 + \frac{4m^4a^2}{r^4}x^2 - \frac{4m^2c^2a}{r^4}x + \frac{m^4c^4}{r^4} = o$.

Da questa col fare $y = o$ *si troverebbero i vertici degli assi in un' equazione di quarto grado, che sarebbe divisibile in quattro di primo. Da questa le tangenti; cose che si sono trovate più facilmente colla Geometria. Da questa finalmente i flessi contrarj, e tutto quello che appartiene alla Curva. Ma basta fin qui di questa ricerca.*

Aggiunta sulla moltiplicità de' casi.

Se si cerca il numero di tutti i casi principali di queste Curve quando il PC *non va all' infinito, essi sono* 35, *che si riducono propriamente a* 29 *per la totale coincidenza di* 6 *con*

con altri tre; e per vedere queste variazioni, vi vorrebbero almeno 29 figure diverse.

Non considerato ancora il punto F, *e stando fermo* C, *può il punto* E *stare primo in* P; *secondo tra* P *e* C; *terzo in* C; *quarto dopo* C; *quinto all' infinito. Intanto il punto* F *può stare primo in* P; *secondo tra* P *ed* E; *terzo tra* E *e* C; *quarto in* E; *quinto in* C; *sesto dopo* C; *settimo all' infinito. Questi sono sette casi per ogni caso delli primi cinque, onde sarebbero* 35. *Ma nel primo caso di* E, *i primi tre di* F *sono gl' istessi, trovandosi in esso sempre* F *in* P. *Nel terzo caso di* E, *il terzo, quarto, quinto di* F *sono gli stessi, trovandosi in essi* F *in* C; *nel quinto caso di* E *gli ultimi tre casi di* F *sono gl' istessi, trovandosi in essi* F *sempre all' infinito. Così rimangono* 6 *di meno, e però* 29.

Se va all' infinito P, *e non* C, *vi sono tutti i casi delle sezioni coniche. Se va all' infinito* C, *e non* P, *vi sono tre casi di* E, *che può essere in* P, *in una distanza finita, e all' infinito. Per questi tre casi, vi sono nel primo: tre di* F *in* P, *in una distanza finita, e all' infinito; nel secondo cinque, cioè in* P, *prima di* E, *in* E, *dopo* E, *all' infinito; nel terzo caso tre, cioè in* P, *in una distanza finita, all' infinito. E però altri* 11.

Se C *stia in* P, *vi sono altri tre casi di* E, *cioè in* P, *in una distanza finita, all' infinito. E per essi altri* 11 *di* F.

Dunque tutti i casi insieme si riducono a $29+11+11=51$. *Oltre a tutti quelli che appartengono alle sezioni coniche riportate alla direttrice.*

Ognuno di questi casi ha qualche cosa di notabile, e in tutti vi sono delle suddivisioni d' innumerabili casi nati dai particolari rapporti delle tre linee PF, PE, PC, *non contenendosi negli esposti, che il solo eccedersi, annullarsi, infinitarsi, senza considerare le infinite diverse ragioni nel caso degli eccessi finiti.*

Let-

Altra Lettera 27. Aprile 1748. ſcrittami dal Medeſimo ſullo ſteſſo ſoggetto.

Giacchè quelle quattro bagatelle, che io le ſcriſſi intorno alla Curva da Lei propoſtami conſiderata nella ſua generalità, hanno avuto dell' incontro preſſo V. S. Illma non voglio laſciare di avanzarle un' altra notizia intorno alle medeſime. Benchè le mie occupazioni non mi permettono queſta volta di diffondermi più in lungo, nè di far altro che accennarla. Quella contiene tutte le curve conſiderate dal Carteſio nella ſua Geometria ſul fine del lib. 2., per le refrazioni, e la coſtruzione delle quali il Nevvton generalmente abbraccia nella propoſizione 97. del libro primo de' ſuoi principj, e delle quali parla nel Corollario primo. Anzi la coſtruzione generale del Nevvton coincide a diritura colla nozion generale della Curva, che ho data, e ſi può facilmente ridurre a quella coſtruzione, che ho meſſa immediatamente avanti all' equazione.

Il Nevvton trova (Fig. 5. Tav. 8.) *che acciò i raggi partiti dal punto* A *vadano ad unirſi nel punto* B *dopo la refrazione nella ſuperficie generata da una Curva* CDE, *che ſi cerca, ſi può prendere il punto* C *ad arbitrio, indi preſa pure* CN *verſo* B *ad arbitrio, e* CM, *che deve eſſere incremento della* AC *a* CN *decremento della* BC *nella ragion data del ſeno d' incidenza al ſeno di refrazione, co' centri* A *e* B, *cogli intervalli* AM, BN *ſi determinarà il punto* D, *che ſarà alla Curva cercata.*

Ora ſe ſi prende CH *verſo* B, *a* CB *nella ſteſſa ragion data, e col centro* A *coll' apertura* AH *ſi faccia un circolo* HI, *che incontri in* D *la* AD *prodotta, ſarà ancora* BD *a* DI *in ragion data, cioè in quella di* BC *a* BH, *o del ſeno di refrazione al ſeno d' incidenza. Giacchè eſſendo* BC *a* CH, *e* CN *a* CM *in detta ragione, col togliere proporzionali reſterà*

anche

anche BN *ad* MH *nella ſteſſa ragione. Onde eſſendo* BD *eguale a* BN, *e per le* AH, AI, *ed* AM, AD *eguali, anche la* DI *eguale a* MH. *Sarà nella ſteſſa ragion data anche* BD *a* DI.

Sicchè Ella qui vede, che rimangon i punti A,C,B,D,H,I *di queſta figura gli ſteſſi, che nella* fig. 3. Tav. 9. *delle traſmeſſe a Lei nella mia ultima lettera i punti* P,b,F,mi,C,Hi. *Vede inoltre che ogni volta che il ſeno d'incidenza al ſeno di refrazione ſtarà come numero a numero, ſi potrà la Curva deſcriver co' fili. Così nel vetro dall' aria il ſeno d'incidenza al ſeno di refrazione, è come* 3 *a* 2. *Se una eſtremità del filo* (1) *ſi ferma in* F (Fig. 4. T. 8.), *indi ſi piega preſſo allo ſtilo* Mi, *e poi ſi avvolge d'intorno ad un pivolo* P, *quindi vada in* V, *e poi ſi avvolga d'intorno al pivolo* F, *e poi finalmente coll'altra eſtremità vada a metter capo in* Mi, *con lo ſtilo* M *ſi deſcriverà la Curva* Mb *cercata*.

Perchè ſi vede chiaro, che poſta $PMi = z$, $MiF = u$, *tutto il filo* $= a$, *ſarà* $2z + 3u = a$; *e però* $2dz + 3du = 0$, *onde* $2dz = -3du$; *e* $dz . -du :: 3 . 2$. *Onde* (Fig. 5.) *eſſendo nata la* CM *da tutti i* dz *incrementi della* AD (*che è* PM *della* fig. 4.), *e* CN *da tutti i* $-du$ *decrementi della* BD (*che è* MF fig. 4.) *ſarà ancora* (Fig. 5.) CM . CH :: 3 . 2, *come il ſeno d'incidenza al ſeno dell'angolo rifratto*.

Generalmente baſterà fare, che il filo in MF *ſia radoppiato tante volte, quanto eſprime il numero del ſeno d'incidenza, e in* MP *quanto eſprime il numero del ſeno di refrazione, e ſempre ſi avrà la Curva cercata*.

Qui non ſi vede, che uſo abbiano le altre Curve della coſtruzione generale, che le mandai; ma baſterà accennare queſto ſolo, che ſi avranno in eſſe tutti i caſi, ne' quali i raggi porta-

(1) Si avverte, che queſta tale diſpoſizione di filo (*Fig.* 4. *T.* 8.) non è del P. Boſcovich, ma è quella medeſima, che propongo io nel mio teſto, e che non per altro ho qui ſoſtituita alla ſua, ſe non perchè parmi, che il filo ordinato così rieſca più agile, e libero a muoverſi.

portati con direzioni, che passano per un punto, o sia che da quello partano, o che a quello vadano, urtando in una superficie generata dalla revoluzione di una Curva interno a un asse, e ivi o passando oltre, o tornando indietro, ma in modo che il seno dell' angolo d' incidenza al seno dell' angolo refratto, e dell' angolo di riflessione sia in data ragione, debbano avere direzioni che passano per un punto, o andando verso quello, o fugendone. Ed ogni volta che la normale segherà l' angolo, che le rette PM, MF *delle* Figure 1. 2. 3. T. 9. *della mia ultima formano verso la* PF, *e che è l' interno del triangolo* PMF, *sempre si avrà il caso della riflessione; quando poi detto angolo sarà segato dalla tangente, si avrà il caso della refrazione. Benchè il caso di una riflessione fatta con quella legge non esiste in natura; essendo nella riflessione della luce il seno dell' incidenza eguale al seno di riflessione, e negli altri corpi non perfettamente elastici, le tangenti di detti angoli sono in data ragione, e non i seni.*

ARTICOLO TERZO.

Altre Ovali descritte col filo in altra maniera.

QUanto più fuori delle menti degli uomini fu la descrizione organica di Curve, che rassomigliassero ad una sezione d'uovo, altrettanto crebbe in me la voglia di recarvele, suggerendo nuove vie, onde detta descrizione si conseguisca. Mettendo adunque soltanto (*Fig.* 8. *Tav.* 8.) un altro pivolo E per dirittura a quelli già messi in P, ed F, secondo la situazione che sortisce rispetto a quelli, nascono nuove Curve. E quando la distanza EF sia eguale ad una quinta parte incirca della distanza FP, ed il filo fisso in P movendosi, sdruccioli d'intorno ai due pivoli F ed E, vengono dallo stilo M, ovvero *m* descritte altre Ovali, purchè la porzione FM non eguaglj la porzione FP,

o

o la porzione FE due volte presa; perchè nel primo caso la Curva fa un angolo curvilineo in P, e nel secondo in F. Per altro quante mai Curve risultino dalla situazione dei detti tre pivoli fitti nel piano l'uno per dritto all'altro, l'asse loro generalmente è (se la porzione FM è eguale, o minore di FP) è dico l'asse $= ME + \frac{ME + 2EF}{3}$, cioè (*Fig.* 9.) $= AE + EB$. Se poi la porzione F*m* è maggiore della porzione FP (*Fig.* 8.) l'asse sarà $= \frac{mP}{3} + PE + \frac{mE + 2EF}{3}$. Espressione, che per addattare la Curva alla data lunghezza della tavola, o cornici, a' Meccanici basterà, giacchè non sarebbe poi facile definire senza calcolo anche la massima larghezza.

Ma se il pivolo E dall'uno o dall'altro pivolo F, o P recedendo, all'uno o all'altro si accostasse tanto, che venisse ad essere tutt'uno, questo caso tornarebbe lo stesso della *Fig.* 1., 2., e 3.

Se poi disposti i fóchi per dritto, come nella 8., ed il filo composto come nella 6., e lo stile posto in M, si concepisce il pivolo E accostarsi, e coincidere nell'uno o nell'altro pivolo P, ovvero F; allora verrebbe certo il caso della *Fig.* 1., 2., 3.; ma la ragione di HM ad MF, che ivi era come 2 ad 1, seguirebbe qui (*Fig.* 6.) come 3 ad 1, e nientedimeno si avrebbero sezioni belle di vovo.

Ma se finalmente i pivoli non più si mettessero per dritto, ma tra essi un qualsisia angolo costituissero, nessun altro più fecondo soggetto potrebbesi immaginare in questa materia, ma non voglio più inoltrarmi in tali ricerche, che troppo longi mi condurrebbero. E basti per ora aver indicato di quanti preclarissimi usi sia capace un semplice filo.

ISTRO-

ISTROMENTO VIII.

PER LA DESCRIZIONE DI UNA CURVA INCOGNITA.

BEnchè essendo l'equazione (1) di questa Curva (inutile forse così come incognita) troppo alta e composta, avrei potuto dispensarmi di descriverla organicamente, l' ho nonostante descritta; sì perchè somministra Curve somiglianti a sezioni di frutta, o a foglie d'erbe, d'alberi, e fiori, le quali diedero occasione a questa mia bagatella, sì perchè l'immortale Nevvton a ciò fare m'induce con queste precise parole (2): *Æquationis simplicitas non est, sed descriptionis facilitas, quæ lineam ad constructiones problematum prius admittendam esse indicat; nam æquatio ad parabolam simplicior est, quam æquatio ad circulum, & tamen circulus ob simpliciorem descriptionem prius admittitur*. Laonde per esser facile la *descrizione* così *per punti*, che *organica* di questa Curva, vengono per lo meno avvertiti i Filosofi, ch' essa non è affatto indegna delle loro applicazioni. E però principiarò dalla sua *descrizione per punti*.

ARTICOLO PRIMO.

Descrizione di detta Curva per punti.

COndotti pertanto (*Fig.* 1. 2. 3. *Tav.* 10.) dal centro C alla periferia i raggi CV, C1, C2 ec. equidistanti; e

L poi

(1) Presi (*Fig.* 2. o piuttosto 8., *Tav.* 10.) due archi eguali VD, GB, si conduca il raggio CB; e la BP, DI normali ad MV. Poichè per la costruzione l'angolo VCD = all'angolo GCB; sarà anche l' angolo DCG = BCM; e però CI seno dell' angolo DCG = BP seno dell'angolo BCM. Ciò posto sia il raggio CV = a, ed abbassata dal punto Q della Curva la QH normale a CV, si chiami CH = x. HQ = y. E seguendo l' operazione risultarà questa equazione $y = \pm \sqrt{\frac{x^3 - 2axx + aax.}{2a - x}}$

(2) *Arith. universf.* pag. 286.

poi dal vertice V altrettante rette VG, V1, V2 ec. che comprendano alla periferia archi eguali a quelli de' raggi, la linea, che fcorrerà per i punti d'interfezione delle rette CV con VG; C1 con V1; C2 con V2 ec. farà la incognita Curva propofta.

ARTICOLO SECONDO.

Defcrizione organica di detta Curva.

SI concepifca (*Fig.* 4.) ftare fiffo ed immobile al piano orizzontale per mezzo di due viti introdotte nei forami A, B un anello pur orizzontale ABD, nella di cui cofta, o margine interiore abbiafi a muovere in cerchio un altro anello *Vndm* divifo per diametro da una feffura *nm*, e nella folidità della fua circonferenza fcolpito di una fcannellatura circolare, in cui fi muova il prifma della *fig. 6.* coll' anneffo uncino *d*, qual prifma fi fermi per di fotto con una vite in qualunque dato punto di detta circonferenza; cofìcchè l'anello interiore, il prifma, l'uncino coftituifcano, per dir così, un medefimo pezzo. Un regolo poi VD quinci riceva nella feffura, onde pel lungo è aperto, riceva, dico, l'uncino *d* conneffo al prifma fuddetto, e quindi in un buco V un altro uncino ʒV afferrato all' anello efteriore ABD. Dove poi le feffure *nm*, VD s'interfecano in S, trapaffa giù, e giunge nel piano della carta uno ftilo S congiunto ad una guida fcorrente pel lungo del feffo regolo VD, onde fi defcrive la propofta Curva.

Perchè la fola feffura *nm* fa per tutti i raggi (*Fig.* 1, 2, e 3.) CV, C1, C2, ec. e la feffura VD per tutte le rette VG, V1, V2 ec. E la *fig. 5.* rapprefenta per la fezione *eb* la groffezza, e forma dell'anello efteriore ABD della *fig.* 4. fermato al piano con la vite N, che nella *fig.* 4. andarebbe pofta nei forami A, e B. Per *ca* s'indica la groffezza, e forma

forma dell' anello interiore *Vndm*; e per il bianco interposto s'intende il vuoto spazio, in cui deesi introdurre il prisma coll' uncino *d* della *fig. 6.* che per di sotto si ferma con l'opportuna vite C.

Ora per la piena intelligenza, e prova di questa costruzione, si concepisca l'Istromento essere per esempio ordinato alla *fig. 2.* nella quale è da considerare: Primo, che il raggio CV, e la retta VG sono le prime linee, le quali intersecantesi in V formano il principio, e vertice della Curva nel punto V, e rappresentano l'Istromento nella situazione dovutagli prima di esser mosso, cioè significano la situazione rispettiva della fessura *nm* (*Fig. 4.*) col regolo VD. Secondariamente, che il punto G è discosto una quarta di cerchio dal punto V, ed *n* alla prima coinciderà in V, e *d* in G. Terzo, quanto sarà per essere l'arco V*n* percorso dal raggio C*n* da V verso G, altrettanto dovrà esser l'arco G*d* percorso dalla retta V*d* da G verso M.

Alle quali cose riguardando si farà (*Fig. 4.*) primieramente che l'uncino *d* col prisma annesso sia fermato con la vite per di sotto, come prima sia condotto lontano da *n* una quarta di cerchio; onde avverrà che nella primiera situazione dell' Istromento la fessura C*n* coinciderà con CV supposto immobile; il punto *d* col punto G; il regolo V*d* starà come corda dell' arco *nd*, e lo stilo S coinciderà ne' punti V, ed *n* pure coincidenti.

Dopo questa disposizione fatto muovere a destra l'anello interiore *ndm* intorno al centro C, perchè i punti *n*, e *d* sono fissi in un medesimo anello, quanto sarà recesso *n* dal punto V, altrettanto il punto *d* sarà rimosso dal punto G, e però l'arco V*n* dal raggio *cn* percorso sarà eguale all' arco G*d* percorso dal regolo V*d*; e trattanto dallo stilo S, che scorre insieme colla sua guida lungo detto regolo VD, verrà descritta sul piano della carta la Curva della *Fig. 2.* Onde si raccoglie, che tutte le Curve generate dal movi-

mento di questo Istromento mutano faccia, secondo che l'uncino *d* è situato più o meno lontano dal punto estremo *n* della fessura *mn*. E la simetria loro partecipa dell' una delle tre Curve, che le *figure* 1, 2, e 3 rappresentano. Cosicchè secondo che l'arco *nd* del circolo interiore sarà eguale all' arco VG della *fig.* 1, 2, 3, o qualunque altra; o la prima, o la seconda, o la terza, o qualunque altra ne verrà.

Si potrebbe ancora coll' uso di alcune molli, o ruote dentate, o altro argomento eccitare nello stilo S certi tremiti regolari, delle quali partecipando la Curva venisse a produrre un parametro rotto, o compartito in spesse, e ben ordinate punte, quali elegantemente spiccano nella *fig.* 7. e 9. Benchè è d'avvertire, che in ogni modo tutte queste Curve saranno per ragione inseparabile del meccanismo diffettive sempre de' primi punti nel vertice V. Ma che vo io ricercando queste piccole cose, se più rara e bella materia nel seguente ragionamento mi si prepara innanzi?

ISTRO-

ISTROMENTO IX.

PER LE CURVE GENERATE DAL MOTO COMPOSTO DI DUE CIRCOLI.

CIOE

Per la Linea retta, Elisse, Circolo, Fiori geometrici, Cicloidi di base circolare, Spirali, *e particolarmente la* Spirale d'Archimede.

PEr gli usi amplissimi, che porta in fronte questa macchinetta, ho giudicato non disconvenirle il nome di *Penna Geometrica*, e spero che chiunque prenderà in grado di leggere questo scritto, resterà facilmente persuaso, che se gli debba meritamente adattare un simil titolo. Ma affine di dare alla molta materia un certo ordine, l'ho divisa in quattro parti, e distinta ciascuna parte in articoli. La prima delle quali comprenderà la *descrizione per punti* delle proposte linee. La seconda, la *costruzione organica*. La terza, gl'usi dell'Istromento. La quarta, essendo che questo Istromento agisce per il moto composto di due cerchj, conterà gli usi di un Istromento simile nel supposto, che fosse stato concepito come adoperante con tre.

PARTE PRIMA.

ARTICOLO UNICO.

Descrizione per punti delle predette Linee.

IN quella maniera, che per dare ad intendere le stazioni, direzioni, e regressi de' Pianeti Tolomeo s'immaginò, che questi fossero posti nella periferia di un mobile *Epiciclo*, il di cui centro fosse nel medesimo tempo rapi-

rapito lungo la circonferenza di un altro *primo Mobile*, e quindi nelli ſpazj del Cielo veniſſero a tracciare una Curva ſimile per eſempio alla *Fig.* 5. *Tav.* 15. Così figuriamſi ora, che(*Fig.*2.*Tav.*15.) di due dati cerchj (il primo *nop* ec. chiamato *primo Mobile*, ed un altro *a*, 1, 2, 6 chiamato *Epiciclo*) il raggio *na* di detto *Epiciclo* volgaſi d'intorno al proprio centro *n* nello ſteſſo tempo, che queſto centro *n* dal raggio *cn* del *primo Mobile* ſia portato per tutti i punti *n*, *o*, *p*, *q* ec. della circonferenza di detto *primo Mobile*. Perchè quindi verranno dal punto *a* qualunque di detto *Epiciclo* generate delle Curve, che il Celebre P. Abate Guido Grandi, ſotto il nome di *Rodonee* generalmente comprende, e ſpecialmente deſcrive (1) col farle paſſare per infiniti rami tirati da un medeſimo centro, ed eguali ai ſeni di angoli corriſpondenti in data ragione, ad altri angoli formati da detti rami con una poſizione coſtante data. Ma con un eſempio, che ſervirà per tutt' altre Curve, che foſſero propoſte di queſta ſchiera, produrrò quella *deſcrizione per punti*, che ſiccome diede animo all' invenzione del preſente Iſtromento, così a quello ha grandiſſimo rapporto. Prima però è da conſiderare, che tre cauſe coſpirano alla modificazione, o ſia generazione di queſte tali Curve.

Prima, perchè la lunghezza de' raggi *cn*, ed *na* dei due *Mobili primo*, ed *Epiciclo*, può eſſer in data ragione diverſa.

Seconda, perchè le velocità angolati de' *Mobili* poſſono parimenti eſſere in data diverſa ragione, che riduceſi a tre caſi: Primo, perchè la velocità dell'*Epiciclo* può eſſer maggiore di quella del *primo Mobile*; ſecondo, perchè può eſſer minore; terzo, perchè può eſser eguale. E qui notate, che ſempre che ſi diran *velocità*, ſi vogliono intendere *angolari*.

Terza, perchè un *Mobile* può muoverſi, o in conſeguenza

(1) *Flores Geomet.* Par. I. Definit. 1.

za dell' altro, o in verſo contrario. Ora dunque ſia data la *deſcrizione per punti* di una di queſte linee proveniente. 1. da due cerchj, de' quali ſiano i raggi qualunque dati. 2. mobili con velocità date eguali. 3. l'uno dell' altro moventeſi in ſenſo contrario.

Onde primo fatto centro in C coll' apertura C*n* raggio dato del *primo Mobile* ſi deſcriva il circolo *nop* ec. di detto *primo Mobile*. Così fatto centro in *n* coll' apertura *na* raggio del dato *Epiciclo* ſi deſcriva detto *Epiciclo a*, 1, 2, 6, ed i raggi C*n*, *na* poſti ſiano per dritto in una medeſima linea, figurandoſi che così ſteſsero prima che foſsero poſti in moto, e che la Curva abbia a principiare, e a deſcriverſi dal punto *a*.

2. Le periferie di detti due Mobili ſi dividano in numero di parti, che ſia in ragion data inverſa della velocità. Come ſe la velocità del *primo Mobile* foſse alla velocità dell' *Epiciclo* come 1 a 2, la periferia del *primo Mobile* ſi potrebbe comodamente dividere in parti 8, e quella dell' *Epiciclo* in 4. Ma eſsendo nel noſtro caſo le velocità date eguali, ciaſcuna periferia ſi divida in 8 parti, ed a quelle del *primo Mobile* dal centro *c* ſiano condotti i raggi *co*, *cp* ec., ed oltre a detta periferia anche prodotti. Poi fatto centro in *o*, in *p* ec. con l'apertura *na* ſi deſcrivano cerchj eguali all' *Epiciclo*.

3. Supponendo, che il raggio del *primo Mobile* della primiera ſituazione *cn* ſi muova a ſiniſtra verſo *o*, *p* ec. e ſeco porti l' *Epiciclo*, quando il raggio C*n* volgendoſi ſarà pervenuto in *co*, il raggio *na* coinciderebbe con *o*V, ſe anch' egli non ſi foſse moſso o verſo 3, ſe i moti foſser dati in conſeguenza, o verſo *b*, ſe i moti, come nel preſente caſo, dati foſsero contrarj. Inoltre perchè, quando il raggio *cn* è giunto a coincidere con *co* ha già percorſo uno ſpazio *no*, così preſa col compaſso una parte *a*1 della periferia dell' *Epiciclo*, da V verſo *b* ſi ſegni; e ſe il

raggio

raggio C*n* s'intenda già trascorso due spazj fino a *cp*; presi parimente due spazj *a* 2 nella petiferia dell'*Epiciclo* da X si segnino verso *d*, e così andate dicendo. Onde i punti *a*, *b*, *d* saranno elementi della Curva, e di questa maniera si otterranno anche gli altri, e si legaranno poi con una linea, che sarà la proposta, sarà dico un *circolo*, come (1) a suo luogo si dimostrarà.

Qui per fine è generalmente da notare, che procedendo con questo metodo l'arco V*b* dell'*Epiciclo* sarà al corrispondente arco *no*, che si suppone nel medesimo tempo percorso dal *primo Mobile* (o sia l'angolo V*ob* sarà all'angolo *n*C*o*) in ragion data della velocità; la quale, per esser qui stata data eguale, così gli angoli V*ob*, *n*C*o* sono eguali. Esposta pertanto la *descrizione per punti* si passerà all'*organica* nella seguente parte.

PARTE SECONDA.

Della costruzione dell'Istromento.

ARTICOLO PRIMO.

Piano orizzontale di detta costruzione.

BEnchè altri s'immaginarono (2) delle Curve provenienti dal moto composto di due cerchj applicati l'uno all'altro, come sopra s'è detto, nissuno però le ridusse per anco alle leggi di meccanica. Laonde questa parte addossandomi io, si supponga che (*Fig.* 1. *Tav.* 11.) un *cilindro* TQZ stia fermo ed immobile nel centro di un *primo Mobile* 2, 3, 4, 5, 6, quantunque il raggio Q*r* (di cui fa le veci

(1) Part. 3. Art. 5.

(2) Il P. Castel *Traité* 50.me *de Mathematique: Des Especes des Courbes Liv. primier des divers Ordres.*

veci l'aſta MN) di detto *primo Mobile* ſi volga d'intorno al centro Q, e ſi ſupponga un altro cilindrino *mrd* ſtare nel centro *r* di un *Epiciclo* 2, 3, 4; coſicchè movendoſi detto cilindrino *mrd* in un ſi muova anche il raggio *rs* dell' *Epiciclo*, che con detto cilindrino coſtituiſce un medeſimo pezzo.

Inoltre nel punto T della periferia del cilindro TQZ ſia fiſſato un filo, che d' indi condotto al punto *m* della periferia del cilindrino *mrd*, ed intorno ad eſſo prima più volte rivolto, pur finalmente vi ſi fiſſi. Dico ormai, che dal rotante raggio Q*r* del *primo Mobile* per i punti di detto *primo Mobile* 2, 3, 4, 5, 6 portato il centro *r* dell' *Epiciclo*, nel medeſimo iſtante ſarà coſtretto a girare il cilindrino *mrd*, in un col raggio *r*S dell' *Epiciclo* d'intorno al proprio centro *r*. Perchè, ſtando fermi li due centri Q, ed *r* nella già determinata diſtanza, non può una parte qualunque del filo T*m* piegarſi ſulla circonferenza del cilindro TQZ, che altrettanta parte non ſi ſpieghi giù dalla circonferenza del cilindrino *mrd*; nè ſpiegar puoſſi, ſe il cilindrino cedendo all' attrazione del filo, non ſi volge d'intorno al proprio centro *r*, ed intanto da uno ſtilo poſto nel punto S non venga ſul piano della carta delineata una Curva, a modificar la quale le tre ſuddette cagioni coſpirano, che ſi dovranno da quì innanzi aver ben fiſſe nella memoria, e che nel ſeguente articolo ſi richiameranno alla preſente coſtruzione.

ARTICOLO SECONDO.

Cagioni moderatrici delle Curve ſoggette a queſto Iſtromento richiamate alla preſente coſtruzione.

TRe ſono le cagioni, come già diſſi, onde queſte Curve pigliar poſſono nuove ſembianze, e talvolta nemmeno parer più deſſe. Alla prima delle quali ſi vedrà quanto prima nel piano verticale come l'Iſtromento ſi componga, e

M ſi

ſi determini la lunghezza de' raggi Qr, rS in data ragione.

Per la ſeconda cagione eſſendo tre i caſi, come ſi è detto, delle velocità, a tutti tre per ordine ſi applicherà l'Iſtromento. Onde primo è da ſapere che le velocità (dico ſempre angolari) dei *mobili* ſono in ragion inverſa dei diametri de' cilindri. Il che per render chiaro con un eſempio, ſupponiamo, che il diametro del cilindrino *mrd* ſia al diametro del cilindro TQZ, come 1 a 3; e perchè ſono le periferie come i diametri, ſaranno eſſe ancora nella ſteſſa ragione di 1, a 3. Supponiamo inoltre eſſere ſtato il centro *r* dell'*Epiciclo* traſportato dal raggio Qr del *primo Mobile* ſino al numero 3., cioè ſino alla terza parte della periferia del *primo Mobile*. Onde il filo T*m* avrà acquiſtata la ſituazione Z3, e nello ſteſſo tempo, eſſendoſi piegato d'intorno al cilindro TQZ, avrà occupata una terza parte di eſſo, o ſia tutto l'arco TZ; alla quale eſſendo per ſuppoſto eguale l'intiera periferia del cilindrino *mrd*, ſegue indubitatamente, che il cilindrino *mrd* inſieme col congiunto raggio *r*S abbia compita un'intiera revoluzione intorno al proprio centro *r*, e però due altre rimangono da farſi, mentre una ſola ne compie d'intorno al proprio centro Q il raggio Qr, o ſia QR del *primo Mobile*. Dunque la velocità dell'*Epiciclo* è alla velocità del *primo Mobile*, come 3 a 1. Dico in ragion inverſa del diametro del cilindrino *mrd* al diametro del cilindro TQZ, che era, come 1 a 3. Quì pertanto non reſta, che per le date velocità applicare all'Iſtromento cilindri, che ſiano in data ragione. Ma per non andare all'infinito l'ho provveduto di ſoli 12.; il primo de' quali ſia di diametro eguale ad una delle parti eguali della figura ſeconda; il ſecondo a due; il terzo a tre ec. Coſicchè il diametro del minimo cilindro ſarà eguale ad una parte, ed a tutte dodici il diametro del maſſimo.

Finora però abbiam ſuppoſto la velocità dell'*Epiciclo* maggiore di quella del *primo Mobile*; ma per il ſecondo caſo

caſo potrebbe darſi ancora minore, e quindi traſmutandoſi la ſituazione dei termini della ragione delle velocità, doverſi traſmutare anche il luogo a' cilindri. I termini della ragione delle velocità furono nell' eſempio adotto 3, e 1: vale a dire (poichè le velocità ſono in ragione inverſa del diametro de' cilindri) il cilindrino *mrd*, ed il cilindro TQZ; però ſe ſi traſmutaſſe reciprocamente il luogo de' due cilindri, di maniera che il cilindrino *mrd* foſſe poſto nel centro Q del *primo Mobile*; ed il cilindro TQZ nel centro *r* dell' *Epiciclo*, quindi all' oppoſto del primo caſo, ſeguirebbe la velocità dell' *Epiciclo* minore di quella del *primo Mobile*.

Potrebbe darſi per fine il terzo caſo, cioè la velocità de' *Mobili* eguale; onde biſogna aver preſto un altro cilindro eguale ad uno di detti dodici, perchè meſſo uno nel centro del *primo Mobile*, ed un altro nel centro dell' *Epiciclo* vengono detti *Mobili* determinati appunto ad eguali velocità. Ricordando che in ciaſcun cilindro ſia ſcolpito il numero delle parti eguali preſe nella figura ſeconda, che eſſo contiene.

Per la terza cagione (nel ſuppoſto che il centro *r* dell' *Epiciclo* ſia condotto dal raggio Q*r* del *primo Mobile* ſecondo l' ordine dei numeri 2, 3, 4, 5, 6.) ſe il filo toccherà i due cilindri alle parti alterne come T*m*, chiaro è che l' *Epiciclo* ſi moverà in conſeguenza di detto *primo Mobile*, cioè e l' un, e l' altro *Mobile* ſi moverà ſecondo l' ordine dei numeri 2, 3, 4 ec. 2, 3, 4 ec.; ma ſe il filo toccherà i due cilindri alle medeſime parti, come Td (ſtando ancora il ſuppoſto predetto, che il raggio Q*r* del *primo Mobile*, ſi muova ſecondo l' ordine dei numeri 2, 3, 4, 5, 6) l' *Epiciclo* girerà contro l' ordine de' proprj numeri 4, 3, 2 ec., cioè i moti de' *Mobiti*, in queſto caſo ſeguiranno l' un dell' altro inverſo contrario. Onde ſi raccoglie, come queſta coſtruzione regge fin' ora aſſai bene all' azione di tutte

M 2 tre

tre le cause producenti le molte trasformazioni di queste illustri Curve, per poter senz' altro passare al *piano verticale* di detto Istromento.

ARTICOLO TERZO.

Piano verticale del presente Istromento.

FOrse altrui sembrerà, che confrontando il sopra esposto *piano orizzontale* con questo *verticale*, si abbiano in questo tralasciate troppo più parti, che non doveasi. Conciossiacchè di questo in quello non si riscontrino altro che il filo, i due cilindri, l'asta MN (che sta pel raggio del *primo Mobile*) ed il raggio rS dell' *Epiciclo*. Ma anzi io affermo, che operando altrimenti, e quindi diventando la figura troppo confusa e impedita, nè quanto si è spiegato così, spiegato si avrebbe, nè le parti perciò sarebbero state meglio indicate, come forse riusciranno in questo *piano verticale*.

In quella guisa pertanto, che gli Architetti dai fondamenti principiano gli edificj loro, comincierò io (*Fig.* 3.) dal piedestallo d'acciajo AEDX, che come quello, che il rimanente della macchina sostenta, è con due valide viti I, I fermato, e congiunto ad una tavola orizzontale immobile AX. Nel sito poi DE è trapassato per il mezzo da un buco quadrangolare, in cui entra il palicello QG pur d'acciajo indicato con puntini, e che prima passa in un forame rotondo dell' asta MN, indi in un cilindro ZT, ed appresso nel prefato buco DE del piedestallo, a cui stretto per fine da una vite G sta attaccato, ed insieme con detto piedestallo e cilindro ZT, e tavola orizzontale AX rimane affatto immobile; ancorchè d'intorno ad esso ruoti l'asta di metallo MN. Dal piano orizzontale di quest' asta si scorge come (*Fig.* 1.) essa deve avere un buco circolare in Q (che è

è coperto dal cilindro ZT), nel qual appunto riceve il palicello QG della *figura* 3. Poi si fende per il mezzo da Q verso N, e vien cinta da un anello o sia guida *nn* pur di metallo forata con un buco (che è pur coperto dal cilindrino *r*) rotondo, e verticale all'orizzonte in *r*, e di due buchi quadrangolari aperta nel fianco *nn* (*Fig.* 4.), nei quali introdotta detta asta MN, a quella in qual punto più si vuole con la vite C si stringe, e ferma.

Il detto palicello (*Fig.* 3.) QG, (che d'ora in poi *Asse del primo Mobile* chiamaremo) quadrangolare, e dilatato alquanto è presso Q, acciò vaglia a ritenere sospesa in alto la suddetta asta MN; e rotondo seguita dove l'asta MN lo circonda introdotto nel forame suo orizzontale; ed è quadrangolare di nuovo, e più sottile, dove per il cilindro ZT, e per DE, fino in G trapassa.

Un altro palicello RP (chiamato *Asse dell' Epiciclo*), entra prima nel buco rotondo orizzontale della guida *n* (o sia *nn* della *figura* 1.), d'indi nel cilindrino *m d*, ed in fine con una vite P si ferma così, che però volger si possa dentro il buco di detta guida *n*. Questo parimenti è assai dilatato presso R, e trapassato da un forame transversale, in cui s'introduce il raggio QS al suo stilo o penna S annesso, e dovunque si vuole con una vite laterale si ferma. Inoltre detto palicello RP è fornito di un piatello circolare *pz* (indicato dalle perpendicolari morte cadenti da questo piano verticale in quello orizzontale per l'area circolare ombreggiata *nn*); e poi quadrangolare procede, finchè entra nella guida *n* dove è rotondo; d'indi quadrangolare tornato di nuovo per mezzo del cilindrino *dm* fino in P perviene, ed ivi si stringe con la sua vite P. Due molli poi dal perito Artefice applicate comunque nel sito (come in *figura* 1.) *nn*, premano tanto il sottoposto piatello *pz*, che l'*asse* RP dell' *Epiciclo* a quello annesso non così di leggieri volger si possa.

Que-

Questa costruzione spedita esser dovrebbe, avvisando che il cilindro TQZ del *primo Mobile* della *figura* 1. sia in questa 3. il cilindro ZT; per il cilindrino *mrd* dell' *Epiciclo* in quella, in questa il cilindrino *md*; per i centri Q del *primo Mobile*, ed *r* dell' *Epiciclo* in detta figura 1., in questa 3. l'*asse* QG, e l'*asse* RP; e per il raggio qualunque Q*r* del *primo Mobile*, che in quella seco porta il centro *r* dell' *Epiciclo*, in un col cilindrino *mrd*, in questa *figura* 3., ed in quella prima supplisce l' asta MN, quale rotando intorno all' *asse* QG del *primo Mobile*, seco mena, e sostiene l' *asse* RP dell' *Epiciclo*, e l' annesso cilindrino *md*, e pet l' opportuno filo T*m*, (che per il movimento di detta asta rotante intorno all' *asse* QG, altrettanto si avvolge d' intorno al cilindro ZT, quanto si svolge dal cilindrino *md*) vien messo in moto anche il raggio QS, che sta per qualunque dato raggio *r*S dell' *Epiciclo* della *figura* 1., perchè si può sospingere, e respingere pel buco presso R, e con la vite laterale fermare, quando si trova nella data lunghezza.

Ma per non mancare a detta asta MN de' necessarj ajuri, e stabilirla così, che sia costretta a rimanere sempre parallela all'orizzonte, e ad angoli retti degli *assi* dei *Mobili* QG, RP, con una vite N si connette a quella un forbice V, che si unisce per di sopra con un' altra vite ad un vette VE mobile pur insieme con detta asta MN d' intorno all' asse QG. Mi piacque in oltre metter sopra la tavola AX un altro piano di cartone FS fornito per di sotto di due molle *ee*, *ee* in modo arrendevoli, che nè del tutto resistano, nè cedano troppo alla pressione dello stilo S. Egli è appunto sopra questo piano di cartone FS, che hassi poi a distendere, e fermare la carta, su cui si pensa descrivere la Curva.

Finalmente per non lasciar cosa, che, ad intendere la fabbrica, ed i movimenti di questo Istromento potesse contribui-

bui-

buire, debbo avvertire, che le parti tratteggiate AXGDTZQ formano, dirò così, un sol pezzo, che deve concepirsi permanente in una costante quiete. Le parti M*n* NVE, che sono ombreggiate a puntini si vogliono supporre un altro pezzo, che sospinto con la mano muovasi d'intorno all'*asse* del *primo Mobile* QG; le altre restanti pur tratteggiate parti QSR*pzdm*P rappresentano parimenti un altro pezzo, che tutto insieme gira nel buco della guida *n* d'intorno alla insieme rotante *asse* dell'*Epiciclo* RP; mentre detto asse RP dal riferito pezzo ombreggiato a puntini viene portato per la circonferenza di un cerchio, che è il *primo Mobile*, e di cui il centro di rotazione è l'*asse* QG. Finalmente il piano di cartone FS, e le connesse molle *ee*, *ee*, formano un altro pezzo con puntini leggiermente distinto, e che si muove, come si disse, secondo che per alcuna inegualità di esso piano di cartone, accadesse in esso maggiore, o minore lo sfregamento dello stilo S.

ARTICOLO QUARTO.

Disegno Scenografico del presente Istromento.

LA tavola duodecima dimostra così al vivo la forma, e situazione delle parti di questo Istromento, che per essa sola avrebbesi forse potuto dimostrare l'artifizio della sua costruzione. Nonostante soffrite, che almen di volo accenni con quale analogia le parti descritte nelli andati piani si riferiscano alle rispettive parti scenografiche di questa figura. La tavola dunque orizzontale AX della *Figura* 3. *Tav.* 11. è in questo disegno; la tavola *&y*OT; il piano di cartone FS di quella figura, in questa è il piano HCDK; gli *assi* QG, RP sono quì gli stessi QG, RP; così di quella le parti EV, NM sono le medesime in questa, e dell'altre andate via dicendo così, giacchè trovarete che per non ingom-

gombrare la figura, si è tralasciato di riportar quì il solo piatello $p z$, e le molle ad esso spettanti; mentre frattanto io preparo detto Istromento a' dati supposti.

Sia però proposto di descrivere una Curva, che provenga 1. dall'eguaglianza de' raggi dei due *Mobili primo ed Epiciclo*; 2. dalla velocità del *primo Mobile* data a quella dell' *Epiciclo*, come 1 a 3; 3. dai moti de' *Mobili* in contrario verso.

Onde primieramente fermata con la vite laterale la guida *n*, fermo in appresso anche il raggio dell' *Epiciclo* FS (*Tav.* 12.) qualora la parte di detto raggio presa sul piano da S fino all' incontro della prodotta PR in 2. è eguale alla distanza presa da 2. fino all' incontro della prodotta GQ in 3.; cioè qualora S, 2 = 2, 3; ovvero (*Fig.* 1. *Tav.* 11.) qualora Q*r* è fatto eguale ad *r*S. Secondo, allentate le viti G, e P, e fuori tirati gli *assi* GQ, PR sostituisco ai quai si sieno presenti cilindri il cilindro segnato 3. per l'*asse* QG del *primo Mobile*, ed il cilindro segnato 1. per l'*asse* PR dell' *Epiciclo*, e ritorno poi l'Istromento nel primiero suo stato. Terzo avvolto il filo sul cilindrino dell' *Epiciclo*, e messa la mano in V muovo l'asta MN all'opposto di chi legge, avvertendo di abbassar con l'altra mano il piano di cartone HCDK, finchè del tutto sia teso il filo, e tangente la periferia d'amendue i cilindri alle medesime parti, che rilasciato poi detto piano di cartone, e seguitando a muover l'asta in giro si conseguirà la Curva proposta, quale sarà la 11. della *Tav.* 16. Quando però due ostacoli non s'incontrino, che si accusaranno in questo prossimo Articolo.

ARTI-

ARTICOLO QUINTO.

Risoluzioni delle seguenti obbiezioni.

Avvegnacchè non abbia fatta pruova di questa costruzione, parmi tuttavia, che sia soggetta a due gravissime difficoltà. La prima delle quali è, che forse il filo non si mantenga sempre egualmente teso, ma si raccorci o si stenda non solo per la causa intrinseca della sua incostante flessibilità; ma molto più perchè talvolta (*Fig.* 3. *Tav.* 11.) per qualche inegualità o contranitenza del piano di cartone FS, dovendo lo stilo S vincere una maggiote o minore resistenza, il filo patisca una diversa tensione. Secondariamente perchè nel supposto dell' Istromento mosso come sopra, quando la punta dello stilo S accaderà che sia, dove in figura appunto è, si combinaranno così ad un medesimo verso la resistenza del piano, e l'azione dello traente filo, che potrà per avventura, muovendosi nella sua guida l'*asse* RP per la sola resistenza del piano, l'azione del filo ridursi a zero; e perciò molta più parte di filo svolgersi dal cilindrino *md*, che non si avvolgerà d' intorno al cilindro ZT.

La seconda difficoltà è, che si possano costruire cilindri tanto esatti, che tutti vengono in ragion data per lo appunto; principalmente perchè a me pare, che il diametro loro debba mancare dalla data ragione di tutta la grossezza del filo: cioè, che volendo per esempio fare, che il diametro di un cilindro sia eguale a cinque parti eguali della *Fig.* 2. non abbia veramente ad esserlo, ma il diametro del cilindro più la grossezza del filo debba esser eguale alle dette cinque parti.

Ora in quanto alla prima obbiezione, per correggere lo specifico rilassamento, e reccorciamento del filo, basta in

N suo

ſuo luogo ſoſtituire una catenella d'acciajo, o un groſſo filo d'ottone ſimile a quelli, che s'adoprano ne' clavicembali. Ma per ciò che riſguarda alla cauſa eſtrinſeca, cioè per fare, che in qualunque ſituazione dello ſtilo S mai la reſiſtenza del piano riduca a zero l'azione del filo, ſi avrà cura, che le molle prementi il piatello *pz* ſiano aſſai più valide, che non ſono le molle *ee*, *ee* del piano di cartone; concioſſiacchè la reſiſtenza (trattane qualche inconſiderabile inegualità del piano) ſia cagionata dalla ſola forza di dette molle *ee*, *ee*.

Per la ſeconda obbiezione ſi oſſervi nella *Fig.* 2., che per ciaſcuna parte eguale è ſegnata una particola, che ſignifica la groſſezza del filo. Onde qualunque volta ſi prenderanno quante ſi vogliono di dette parti per riportarle ſul diametro de' cilindri da coſtruirſi, ſi reſterà indietro dal giuſto numero una di quelle particole. Ma ſe a queſta neceſſaria preciſione qualunque, la perizia degli Artefici non poteſſe arrivare, ai cilindri, al filo, o catenella, ſoſtituirò le ruote dentate nel ſeguente Articolo.

ARTICOLO SESTO.

Ruote dentate ſoſtituite al filo, e cilindri.

VOlendo dunque, per agevolare l'eſecuzione di queſto Iſtromento in luogo del filo e cilindri, far uſo delle ruote dentate, ſe ne avranno a preparare dodici, il numero dei denti delle quali ſia in quella proporzione, che prima furono determinate le periferie, o ſia diametri de' cilindri. Onde ſiccome la ſerie di quelli era diſpoſta in progreſſion aritmetica; perchè il primo era eguale (*Fig.* 2. *Tav.* 11.) ad una delle parti eguali di detta *Fig.* 2.; il ſecondo eguale a due di dette parti; il terzo a tre ec. così la prima ruota, ſuppoſto che ſia di otto denti, la ſeconda

da sarà di 16., la terza di 24. ec., fino all'ultima, che sarà di 96.; oltre un'altra ruota di sopra più, eguale ad una di dette dodici, per servire alle velocità date eguali.

Inoltre, per rapporto anche alla situazione delle ruote, deve esser lo stesso, che se fossero cilindri; perchè la ruota, che sarà posta nell'*asse* QG del *primo Mobile* in luogo del cilindro TZ (*Tav.* 13.) starà quasi afferrata a detto *asse*, come detto cilindro costantemente immobile; e quella che si metterà nell'*asse* RP dell'*Epiciclo* in luogo del cilindrino *md* agirà parimenti come se fosse detto cilindro *md*. E se nell'*asse* GQ del *primo Mobile* venisse messa una ruota di 24. denti, ed un'altra di 8. nell'*asse* PR dell'*Epiciclo*, e (fermata la guida *n*, che porta l'*asse* RP dell'*Epiciclo* predetto, subito che accostandola all'*asse* del *primo Mobile*, una ruota giunge ad ingranar con l'altra) si facesse poi muover l'Istromento, le velocità dei mobili seguirebbero pur anche, come nel caso che fu (1) già addotto de' cilindri: cioè l'*Epiciclo* farebbe tre revoluzioni, mentre il *primo Mobile* ne compisce una sola; perchè anche nel caso delle ruote le velocità sono in ragione inversa dei numeri dei denti, o vogliam dire delle periferie.

Una cosa sola è però da riflettere nel caso presente delle ruote dentate, che (*Tav.* 13.) quando la ruota *dm* dell'*Epiciclo* sia immediatamente intralciata colla ruota ZT del *primo Mobile*, i moti dei due mobili seguiranno sempre ad un medesimo verso; e che per causare i moti dei mobili in verso contrario, sarà d'uopo frammettere alle due ruote suddette un'altra ruota, numero di denti qualunque, e ferma ad un suo asse *a* mobile nella sua guida *x*.

Questo Istromento delle ruote sta presso di me, e per lo sperimento più volte fatto nella presenza di Personaggi in questa materia, e nelle matematiche versatissimi posso asserire, che riesce a maraviglia, principalmente quando si

N 2 met-

(1) Part. II. Artic. II.

mettono in opera due ſole ruote, acciò i mobili l'un muovaſi in conſeguenza dell'altro. Che ſe ſi hanno a volgere in ſenſo contrario, e però uſo ſi faccia anche della 3. ruota interpoſta a quelle, quantunque le Curve, che ne riſultano ſiano leggiadriſſime, declinano però tanto o quanto dalla dovuta traccia. Perchè una volta per ciaſcuna revoluzione dell' *Epiciclo* ha luogo anche quì la prima obbiezione accennata nell'antecedente Articolo. Concioſſiacchè aguzzato l'ingegno e adoprando qualche penetrazione ſi trova, che quando la reſiſtenza dello ſtilo incontrata ſul piano ſi accoppia coll'azione delle ruote, lo ſtilo in vece di obbedire alle ruote, cede al piano reſiſtente, e con eſſo le ruote pur cedendo, tornano indietro quel minimo ſpazio, che reſta vuoto tra il dente di una ruota, ed il dente di un'altra. E perchè queſto ſpazio è un ſolo nel caſo di due ruote, non produce alcun ſenſibile divario; ma nel caſo di tre, perchè ſono due i punti ove ſi toccano le circonferenze di eſſe ruote, raddoppiandoſi detto ſpazio, tanto o quanto ſi da, come diſſi, a conoſcere. Pure io credo, che a queſto difetto ſi poſſa occorrere, o inveſtigando alcuna ſorta di denti meglio addattati, o piuttoſto applicando ſotto alla ruota *a* di mezzo una molla, la quale per ciaſcun dente che di eſſa ruota *a* paſſa, cada in un incaſtrino di quei tanti, che ſcolpiti foſſero nel piano ſuperiore della guida *x*, quanti ſono i denti di eſſa ruota *a*; e che perciò non poteſse più tornar indietro. Oltre di che ſi ſcema queſto difetto anche da ſe più che le ruote ſono grandi; perchè così tanto più ſi diminuiſce quel picciolo ſpazio vuoto, e quindi le Curve molto più ſi approſſimano al vero loro parametro; il numero, e qualità delle quali eſaminaremo nella ſeguente Parte.

PAR-

PARTE TERZA

Degl' usi dell' Istromento,

CIOE'

Quante, e quali Linee ad esso appartengono.

ARTICOLO PRIMO.

Quante siano dette Linee.

NOn è mai stato, nè credo sia per essere un Istromento di Linee all'occhio tutte diverse così fecondo, come è questa mia PENNA GEOMETRICA. Perchè (lasciando andare, che con poche parti aggiunte, o detratte potrebbesi adattare a tutte le Concoidi, che han per direttrice una *retta*, un *elisse*, un *circolo*, o qualunque altre Curve da essa descritte; e non meno alle inventate del (1) Sig. di Reaumur, eccettuate quelle che han per base l'*Iperbola*, o *Parabola*; e non contando nè meno le spirali, che realmente ad essa appartengono) quelle sole che produce detta *Penna*, stante nella sua essenziale semplicità montano ad un numero prodigioso di ben quasi 1273.

Ed acciò non paja che si voglia altrui imporre, o spacciare a ventura le cose mal intraprese; veniamo al calcolo; nell' instituzione del quale s'introduranno quelle tre cause moderatrici, che furono enunciate nel (2) principio di questo ragionamento.

Cominciando adunque dalla prima, cioè dalla lunghezza de' raggi dei *Mobili*, che può essere in data ragione, la *Tav.* 16. mostra sei figure, quasi dirò di tre lati, la simetrìa delle quali non varia appunto per altro, se non perchè (le altre cose stando le medesime) la sola ragione de'

(1) *Memoires de l'Academie.* An. 1708. p. 197.

(2) Part. I. Artic. Unico.

de' raggi ſia mutata. E ſtante che queſta varietà proveniente dalla ſola mutazione de' raggi, quaſi che in tutte l'altre figure ſempre avviene, perciò il numero 6. comincia ad aver luogo nel calcolo.

Ora avuto riguardo alla ſeconda cauſa, che era la ragion data delle velocità ridotte a tre caſi; perchè per ciaſcuna Curva adoprano due ruote, o cilindri, che ſtanno per i termini della data ragione, e da 12. che eſſi ſono, 66. binarj riſultano; rigettatine però 21., che come oſſervaremo (1) nella tavola delle combinazioni, ſi trovano nella medeſima proporzione, reſtano 45. d'adoperarſi per eccitare la velocità dell' *Epiciclo* maggiore di quella del *primo Mobile*; ai quali altri 45. ſi hanno da aggiungere per il ſecondo caſo della velocità dell' *Epiciclo* minore di quella del *primo Mobile*, ciò che riſulta, come già ſi diſſe dalla ſola traſmutazione del ſito dei termini dei detti binarj; ed un altro binario di eguaglianza ſi deve aggiungere per il terzo caſo delle velocità date eguali; onde ſommati rilevano tutti inſieme 91. binarj, o ſiano combinazioni, altro numero per detto calcolo.

Finalmente per la terza cauſa, che i moti ponno ſeguire, o in conſeguenza, o in ſenſo oppoſto, entra nel calcolo anche il numero 2.

Moltiplicato pertanto il 6. per 91. viene 546., che altresì moltiplicato per 2. riſulta 1092.; che ſommato poi con 181. Cicloidi di baſe circolare derivanti, come poi (2) ſi dirà, dalle combinazioni predette rileva 1273., numemero cercato delle Curve ſpettanti a queſto Iſtromento, il quale nei ſeguenti Articoli ſi comporrà a tenore di quelle leggi di moto, cui dette Curve ſoggiacciono.

ARTI-

(1) Figura 1. Tav. 18.

(2) Part. III. Artic. 9.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Linea retta.

LA prima Linea, che fra gli usi di questo Istromento promisi già fin da principio, fu la *Retta*; e però dico, che (*Fig.* 1. *Tav.* 14.) se: primo il raggio *cn* del *primo Mobile onQ*, ed il raggio *nd* dell' *Epiciclo rcd* saranno eguali; secondo la velocità di quello a quella di questo, come 1 a 2; terzo i moti in verso contrario; l'ultimo punto *d* del raggio dell' *Epiciclo nd* descriverà la *retta* DR.

Si concepisca perciò, che i due raggi *cn*, *nd* prima di esser messi in moto coincidessero con *co* perpendicolare a DCR; e che d'indi il raggio *cn* del *primo Mobile* si sia mosso d'intorno al proprio centro *c* da *o* verso *n* nel medesimo tempo, che il raggio *nd* dell' *Epiciclo* a quello annesso in *n* abbia girato d'intorno al proprio centro *n* da *c* verso *d*, cioè in verso contrario; cosicchè però l'ultimo punto *d* del raggio *nd* siasi sempre trovato in alcun punto della retta CR. L'angolo *cnd* sarà sempre stato doppio dell'angolo *ocn*, o sia, che viene lo stesso, la velocità angolare dell' *Epiciclo*, sarà doppia di quella del *primo Mobile*.

Calata però da *n* la retta *ne* perpendicolare a DR, e parallela alla retta *oc* perchè insistente alla medesima retta DR. Gli angoli alterni *ocn*, *cne* saranno eguali. Ma l'angolo *cnd* è doppio dell'angolo *cne*; perchè essendo per la costruzione i lati *cn*, *nd* eguali, la perpendicolare *ne* divide per metà l'angolo *cnd*. Dunque l'angolo *cnd* è doppio dell'angolo *ocn*. Il che è vero in qualunque punto della retta DR si ritrovi il punto *d*. Si può dunque vincendevolmente inferire: se l'angolo *cnd* sarà doppio dell'angolo *ocn*, il punto *d*

ro *d* sempre persisterà nella *retta* DR. Ciò che era da dimostrare.

Non altrimenti si dimostrarebbe il punto *r* dall'altra parte permanere nella *retta ab*, e tutti i punti della periferia dell'*Epiciclo* in *rette* eguali fra se, ed alla somma de' diametri di amendue i *Mobili primo*, ed *Epiciclo*; perchè quando *d* coincide col punto R, i due raggi *cn*, *nd* sono distesi, e s'eguagliano alla *retta* CR, e così dall'altra parte distesi s'eguagliano a CD.

Quindi viene come si abbia a componere l'Istromento alla descrizione della *Linea retta*; perchè primo si caccierà innanzi, o indietro il raggio dell'*Epiciclo*, e si fermerà poi con la vite, quando (*Fig.* 1. *Tav.* 11.) sarà Q*r* = *r*S; secondo perchè le circonferenze de' cilindri sono in ragione inversa delle velocità, si collocherà il cilindro segnato 2. nel centro del *primo Mobile*, e l'altro cilindro 1. nel centro dell'*Epiciclo*; terzo prima di muover l'Istromento si farà, che il filo, o catenella tocchi i due cilindri alle medesime parti, acciò i moti dei mobili ne seguano contrarj.

Se poi l'Istromento fosse colle ruote dentate; primo come nel caso de' cilindri sarà fatto Q*r* = *r*S; secondo la ruota di 16. denti segnata 2. sarà messa nel centro del *primo Mobile*, e la ruota di denti 8. segnata 1. nel centro dell'*Epiciclo*; terzo acciò i moti risultino in parti opposte si metterà tramezzo a dette ruote (*Tav.* 13.) la ruota portata dall'*asse a* nella sua guida *x*. Onde per l'uno, e l'altro caso nella prima rivoluzione dell'*Epiciclo* (*Fig.* 1. *Tav.* 14.) lo stilo posto supponiamo in *r* descriverà la *retta ab*, e nella seconda rivoluzione, non declinando punto dalla primiera traccia, tornerà indietro da *b* ad *a*.

ARTI-

ARTICOLO TERZO.

Linea retta *proveniente dal moto di un* Epiciclo *rotante nella concava periferia di un altro cerchio immobile*.

UNa leggiadra cosa, e degna in vero che altrui venga a notizia, nasce da quanto si è detto nel precedente Articolo, qual è, che dato il diametro *ac* (*Fig*. 2.) dell'*Epiciclo adc* sudduplo del diametro *ab* di un altro cerchio massimo *a*D*b*R ruotando detto *Epiciclo* nella concava circonferenza di detto cerchio massimo, come se per descriver una Cicloide ruotasse sopra una *retna*. Un punto qualunque *a* della periferia di detto *Epiciclo* descrive la *retta ab*, il punto C la *retta* DR ec.

Conciossiacchè, primo il centro *n* del rotante *Epiciclo* descriverà un circolo *no*, che fingo essere il *primo Mobile* eguale appunto per la costruzione a detto *Epiciclo*, come nel caso della *Fig*. 1.; secondo poichè essendo le periferie come i diametri, la periferia dell'*Epiciclo* viene ad essere alla periferia del cerchio massimo come 1. a 2.; sarà la periferia dell'*Epiciclo* eguale all'arco, o semi-periferia *a*R*b* di detto cerchio massimo; onde l'*Epiciclo* partito dal punto *a* volgendosi in detto cerchio massimo, a detto punto *a* non arriva, se non dopo aver compite due rivoluzioni, una sopra la semi-periferia concava *a*R*b*, e l'altra sopra la restante semi-periferia *b*D*a*; mentre il proprio centro *n* una sola ne ha finita intorno a *c*, centro comune del cerchio massimo, ed insieme del finto *primo Mobile noc*. E però la velocità di questo *primo Mobile* immaginario è alla velocità dell'*Epiciclo*, come 1. a 2.: val a dire nella ragion prescritta per la descrizione della Linea *retta* nella *Fig*. 1.; terzo se ben si riflette il moto del supposto *primo Mobile noc* descritto, come dissi, dal centro *n* del rotante *Epici-*

clo, ed il moto del medesimo *Epiciclo* occorrono inverso contrario. Dunque giacchè quanto era d'uopo allà generazione della *retta* nella *Fig.* 1. in questa seconda riscontra per lo appunto, seguita necessariamente che il punto *a* qualunque di detto *Epiciclo* descriva la *retta ab*, ed il punto C la *retta* DR ec. Il che era da dimostrarsi.

ARTICOLO QUARTO.

Elisse *generata così dal moto composto di due circoli, che dal moto semplice di un* Epiciclo *rotante nella concava periferia di un altro cerchio immobile*.

POichè abbiamo facilmente dimostrato da quai principj riconosca il suo essere la *Linea retta*, mostraremo ora come dai medesimi dipenda anche l'*Elisse*, e che però la descrizione di ciascheduna appartiene egualmente a questa macchinetta. Imperciocchè trasportata parte della *Figura* 1. nella 2., e 3. si dimostra facilmente, che (*Fig.* 2. e 3.) qualunque punto *b*, ovvero H, preso dentro o fuori dell'area del rotante *Epiciclo*, descrive un'*Elisse*.

Sia però dal centro *n* dell'*Epiciclo* condotta una *retta nd* che passi per il punto *b*, ovvero H preso dentro, o fuori dell'*Epiciclo*, ed un'altra *retta* GP che passi per il centro C del *primo Mobile*, e per il punto *d*. Ora io non credo, che sia di bisogno di dimostrare, che il punto *d* descriva la *retta* PG, giacchè quel medesimo argomento, che già valse nella *Fig.* 1., supplisce qui tanto per il punto *d*, quanto per il punto *a* che descrive la *retta ab*; perchè il punto *d* era costituito come *a*, quando prima coincideva col punto P. Ordinati dunque i raggi de' mobili C*n*, *nd* nella *Fig.* 4., e 5. come stanno nella 2., e 3., dico che detto punto *b*, ovvero H, descrive un'*Elisse*, di cui

l'*asse*

l'*asse* minore è eguale al doppio della *retta* bd, e l'*asse* maggiore è eguale al doppio di una *retta* composta di Cn, ed nb, ovvero H.

Descritti pertanto i circoli ApB, IGP per i punti p, ed I da n così distanti, come il punto b, ovvero H, si conduca alla *retta* GP una perpendicolare ACB, che sarà l'*asse* minore, perchè eguale al doppio di bd, e l'*asse* maggiore sarà GP eguale al doppio della *retta* CI composta di Cn, ed $nb = n$I.

Ora per provare, che il punto b, ovvero H si ritrovi nella circonferenza di un *Elisse* (prima dai punti p, ed I tirate alla *retta* GP due altre perpendicolari po, ed Im, che passano per il punto b, ovvero H) dimostrarò una semplicissima, ma essenziale proprietà di detta *Elisse*: cioè che sia GP. AB; ovvero PC. AC:: Im. bm.

Imperciocchè essendo simili i triangoli Cpo, CIm, sarà IC. Im :: pC. po. Permutando IC. pC::Im. po; cioè bm, perchè eguale a po. Ma IC eguale a PC, e pC = AC; dunque PC. AC :: Im. bm. E però la doppia IC, che è GP alla doppia pC, che è AB:: Im. bm. Il che era da dimostrarsi. Ma acciocchè niuna parte di questa dimostrazione possa rivocarsi in dubbio, proverò anche che la *retta* Im sia perpendicolare alla *retta* GP, quantunque passi per il punto b, ovvero H. Perchè l'angolo esterno Cnd è eguale ai due interni insieme nIb, nbI, i quali essendo eguali per essere per la costruzione opposti ad eguali lati nI, nb; l'angolo Cnd viene ad esser doppio dell'angolo nbI. Ora calata giù la perpendicolare ne, questa dividerà per metà l'angolo Cnd, perchè per la costruzione Cn = nd. E però gli angoli alterni enb, nbI saranno eguali. Dunque en, bI parallele, se dunque per la costruzione ne è perpendicolare a GP, alla stessa del pari sarà perpendicolare la *retta* Ibm parallela ad ne.

 Conse-

Conſeguenze dedotte dai tre precedenti Articoli.

1. Tutti i punti della circonferenza dell' *Epiciclo* (*Fig.* 1. 2. 3.) deſcrivano delle *rette* eguali, ciaſcuna fra loro, al diametro del cerchio maſſimo *a*D*b*R, ed alla ſomma dei diametri de' *Mobili primo*, ed *Epiciclo*.

2. Dagl' infiniti punti della periferia del ruotante *Epiciclo* viene in un tratto delineata tutta l'area del cerchio maſſimo *a*D*b*R, ed eſſendo i *Mobili primo*, ed *Epiciclo* eguali le *rette* deſcritte da detti infiniti punti, tutte s' interſecano nel centro C del cerchio maſſimo, tagliando l'una l'altra ſe ſteſſe per metà, e diventando ogni metà raggio di detto cerchio maſſimo, come nella *Fig.* 6.

3. Queſte *rette* dividono il circolo maſſimo in due volte tanti ſuddupli archi, quanti ſono gli archi dell' *Epiciclo* intercetti fra i punti preſi della ſua periferia. Perchè (*Fig.* 2., e 3.) quando il punto *a* dell' *Epiciclo* deſcrive la linea *ab*, il cerchio maſſimo vien diviſo in due archi eguali *a*D*b*, *a*R*b*; quando il punto C di detto *Epiciclo* deſcrive la linea DR, di nuovo il circolo maſſimo ſi divide in due altri eguali archi D*a*R, D*b*R. E però ecco l' *Epiciclo* diviſo in due archi, ed il maſſimo in due volte tanti: cioè quattro, e ciò avviene perchè la periferia del circolo maſſimo è doppio di quello dell' *Epiciclo*. Di più per la medeſima ragione l'arco *a*PR del cerchio maſſimo contiene la metà del numero de' gradi contenuti nell' arco *ad*C dell' *Epiciclo*, quantunque l'arco *a*PR ſia di grandezza eguale all'arco *ad*C; e così l'arco *a*P contiene la metà del numero de' gradi contenuti nell' arco *ad*, quantunque detti archi ſiano di grandezza eguali.

4. Tutti i punti preſi dentro, o fuori dell' area dell' *Epiciclo*, eccettuato il punto *n*, centro di detto *Epiciclo*, deſcrivano delle *Eliſſi*, che parimenti l'una l'altra s' interſeca-

ecano, come nella *Fig.* 7., ma non mai nel centro C comune al *primo Mobile*, ed al cerchio massimo; perchè allora sono *Elissi* trasformate in *linee rette*, e soggette alla seconda Conseguenza.

Ma gli *assi* delle *Elissi*, che chiamo *Esteriori*, perchè descritte dal punto H preso fuori dell' area dell' *Epiciclo*, quindi ponno andare all' infinito rimovendo il punto H sempre più da *n*; e quinci terminano in una *retta*, quando detto punto H sempre più accostandosi a detto punto *n* (*Fig.* 2., e 3.), vada in passando a cadere nel punto *d*. Gli *assi* delle *Elissi Interiori* descritte dal punto *b* preso dentro l'area dell' *Epiciclo* hanno alternativamente i suoi termini, cioè quindi il circolo, e quinci una *retta*. Perchè quando *b* giunge a coincidere con *d*, la *retta* GP è l' *asse maggiore* massimo possibile, e l'*asse minore* è il minimo possibile, perchè ridotto a zero; quando poi *b* va a cadere nel centro *n* l' *asse maggiore* è il minimo possibile, perchè diventa zero; e l' *asse minore* è il massimo possibile, perchè eguale a tutto il raggio *nd*, ovvero *cn* due volte preso.

ANNOTAZIONE I.

Si può dire che la *retta ab* sia un vero Proteo geometrico; perchè ora è diametro del circolo massimo, ora mezza Cicloide eguale al diametro due volte preso del suo circolo generatore, ora un *Elisse* senz' *asse minore*, cosicchè (se mi è permesso scherzare in questa parte) si potrebbe ancor prendere per l' orbita di una Cometa. Imperciocchè quantunque *ab* sia un *Elisse*, di cui l' *asse maggiore ab* non è quasicchè infinitamente grande, come si suppongono esser quelli dell'orbite delle Comete; l' *asse minore* però è infinitamente piccolo, cioè eguale a zero; e però l' *asse maggiore ab* paragonato almeno al suo minore, cioè a zero, può considerarsi come infinito.

ANNO-

ANNOTAZIONE II.

Seguita ancor che per applicare l'Istromento alla descrizione dell' *Elisse*, basta comporlo come si è fatto per la *linea retta*, avvertendo solamente, che i raggi dei mobili non siano eguali.

ANNOTAZIONE III.

Si possono descrivere anche delle *Elissi*, di cui gli *assi* siano dati, e quindi secondo la loro distanza relativa descriver tutte le orbite de' Pianeti, o Comete, data che sia la ragion de' loro *assi*. Conciossiacchè (*Fig.* 4. *Tav.* 15.) dati essendo gli *assi* maggiore *ab*, e minore *ed*; dove s'intersecano nel punto C fatto centro con l'apertura C*e* si descriva il circolo *edf*; indi divisa per metà la differenza *fa* dei due *semi-assi* in *n*; C*n* sarà il raggio del *primo Mobile noz*; *na* il raggio dell' *Epiciclo aqf*; a tenore dei quai raggi si avrà a regolare l'Istromento. Ma perchè potrebbe avvenire che i diametri delle ruote, o cilindri impedissero di poter precisamente aggiustar detto Istromento al raggio C*n* del *primo Mobile*; se non altro si potrà conseguir un' *Elisse*, se non precisamente quella *abed*, almeno una simile, cioè nella medesima proporzione dei detti dati *assi*: Come C*n* ad *na* :: così l'altro raggio del *primo Mobile* determinato dei diametri dalle ruote, o cilindri; al quarto termine che si cerca, e che sarà il raggio dell' *Epiciclo*. Onde ordinando l'Istromento a questi due ultimi termini, verrà un' *Elisse* a quella della *Fig.* 4. simile, o proporzionale.

ANNOTAZIONE IV.

Dalla passata Teoria facilmente si prova ancora la co-

stru-

ſtruzione di un altro Iſtromento aſſai noto ſotto il nome di *Compaſſo elittico*, e ſi ſcorge che manca di tutte le *Eliſſi interne* compreſe tra i due ultimi confini *circolo*, e *linea retta*. Queſto per altro gentiliſſimo Iſtromento conſiſte (*Fig.* 8. *Tav.* 14.) in una lamina circolare *a*D*b*R ſcavata ad angoli retti di due canalini *ab*, DR, che ai lati più ſi allargano più che s'affondano; nei quali ſcorrono due priſmi di ſimil forma, coſtrutti ciaſcuno con un pivolo *d*, ed *r*, quali pivoli entrano nei buchi di un'aſta ZQ fornita di una guida anneſſa ad uno ſtilo H. Meſſa però queſt'aſta in moto, dal pivolo *r* viene determinata nella direzione *ab*, e nel medeſimo tempo dal pivolo *d* nella direzione DR. E intanto avviene, che per queſto moto implicato lo ſtilo H deſcriva ſul piano della carta un'*Eliſſe*.

Imperciocchè diviſo per metà lo ſpazio *rd* in *n*, ed in detto *n* fatto centro coll'apertura *nr*, ſi deſcriva il circolo *r*C*d*, che ſtia per un ſuppoſto *Epiciclo*, quale in qualunque poſizione dell'aſta ZQ paſſerà per il punto C d'interſezione dei due canalini; perchè per la coſtruzione l'ipotenuſa *rd* non può mutarſi, e l'angolo *r*C*d* alla periferia è ſempre retto. Ora fatto centro ancora in C, colla medeſima apertura di ſopra, ſi deſcriva un altro cerchio, che rappreſenti il *primo Mobile*. Ormai qui ſpicca la *Fig.* 1. per appunto, quale, ſenza che io entri in molte più parole, ſomminiſtra la dimoſtrazione da ſe. Ma perchè (*Fig.* 8.) tutta l'area dell'*Epiciclo r*C*d* cade dentro il margine della lamina orizzontale *a*D*b*R; perciò lo ſtilo H impedito da detta lamina, non può eſſer condotto fin nell'area di detto *Epiciclo*. E per queſto l'Iſtromento può deſcriver le ſole *Eliſſi eſterne*, ma non già l'*interne*, come la mia *Penna geometrica* e l'une, e l'altre deſcrive.

ARTI-

ARTICOLO QUINTO.

Descrizione organica del Circolo.

ENnunciando io fra gli usi di questo Istromento la descrizione del *circolo*, ciascuno che sia provveduto non che di un eletto, ma del più vil compasso non potrà sedare le risa, e acchettarsi, se prima non sa che io intendo di un *circolo* risultante dal moto composto di due circoli. Laonde se (*Fig.* 2. *Tav.* 15.) saran dati: primo i raggi C*n* del *primo Mobile*, ed *na* dell'*Epiciclo* in qualunque ragione; secondo mobili con eguali velocità; terzo in verso contrario. Dico che il punto *a* descrivera un *circolo* eguale al *primo Mobile*.

Ma ritorniamoci prima in memoria quanto si è detto di questa *Fig.* 2., quando nella prima parte di questo ragionamento servi per esempio della descrizione organica. Cioè che i raggi C*n*, *na* posti fossero per dritto, immaginando che così stassero prima di esser mossi, e che mossi poi il raggio C*n* a sinistra, e a destra il raggio *na* accadeva, che per le velocità date eguali, l'arco V*b* percorso dal raggio *ob* dell'*Epiciclo* era simile all'arco *no* percorso nel medesimo tempo dal raggio C*o* del *primo Mobile* *nop* ec. Cioè l'angolo V*ob* era eguale all'angolo *o*C*n*. Onde seguita che il raggio *ob* dell'*Epiciclo*, in qualunque punto *o* della perrferia *nop* del *primo Mobile* si ritrovi, sia alla retta C*n*, ed anche a se stesso *na* mai sempre parallelo. Perchè *bo*, *an*C formano un angolo eguale alla medesima retta C*o*V. Ciò posto, sarà *ob*, *qe*; *na*, K*f*; *tm*, *rg*; *pd*, S*b* sempre a se stesso eguale. Perchè poi è anche a se stesso parallelo sarà $bo + oe = oe + eq$; $an + nf = nf + f$K; $mt + tg = tg + gr$, e finalmente perchè *pd*, S*b* sono parallele, ed eguali sarà anche pS $= db$. Voglio dire

che

che le ordinate al *primo Mobile nop* ec. sono egualmente distanti, ed eguali a quelle della Curva descritta, la quale sarà un *circolo*, giacchè anche il *primo Mobile* è un *circolo*. Quindi i punti *abd* ec. si ritrovaranno, dissi, nella periferia di un *circolo* eguale al *primo Mobile nop* ec. E perchè vale questa dimostrazione, qualunque sia la ragione di C*n* ad *na*, la proposizione si verifica in tutte le sue parti.

Ora quantunque abbia per fermo, che si sappia ormai applicare l'Istromento non solo alla descrizione del presente *circolo*, ma eziandio di qualunque altra Curva, di cui siano note le tre cause moderatrici; non ostante anche per questa volta pigliando io questa parte, dico che primo li raggi Q*r*, *r*S (*Fig.* 1. *Tav.* 11.) ponno essere in qualunque ragione; secondo i due cilindri, o ruote dentate debbono essere eguali; terzo nel caso dell'Istromento col filo, il filo toccherà i cilindri alle medesime parti; nel caso delle ruote, si dovranno separare le due ruote dei *mobili* con la roticella intermedia. E tanto basti di questo, perchè i *Fiori Geometrici* porgano più bella occasione di ragionare nel seguente

ARTICOLO SESTO.

Descrizione organica dei Fiori Geometrici.

IO stimarei che la *Penna* delineatrice di questi *Fiori* dovesse star solamente nelle mani di preclare, e dotte Donne; come quelle che non si curano de' frali, e caduchi, ma vogliono essere *ben d'altro ornate, che di perle, ed ostro*. Ne ha per vero dire, questo secolo d'uopo, onde per tali prodigj di quel sesso, porti invidia alli andati tempi, mentre fra i molti, onde abbonda, vanti una Laura Maria Cattarina Bassi, una Contessa Maria Agnesi, una Mar-

chesa (1) del Castelletto, quali e per le Matematiche, e per ogni sorta di Letteraria disciplina, sono ben altro, che non erano le tredici Liriche Donne, o altre celebrate dalle passate età.

Ma acciocchè facendo più a lungo menzione di questi nomi illustri, non sembri che io voglia quindi significare, che la mia *Penna Geometrica* meriti di entrare in considerazione di così fatte Donne, ripigliando un poco più a dietro il mio istituto, ben vi ricorda che il nostro Istromento fu accompagnato da dodici cilindri, o ruote dentate, i diametri delle quali crescevano di mano in mano, come 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; e che per eccitare per qualunque data descrizione le occorrenti velocità, sempre adoperavano due di detti cilindri, o ruote dentate. Come però la varietà, e leggiadria de' *Fiori Geometrici* appunto viene per causa delle cangiate velocità; così mi è parso bene

(1) Su la morte di questa Donna valorosa il Sig. di Voltaire fece questi leggiadri versi:

L'Univers a perdu la sublime Emilie:
Elle aimoit les plaisirs, les arts, la verité
Les Dieux en lui donnant leur esprit, leur genie,
Ils ne garderent pour eux, que l'immortalité.

Versione elegantissima del Sig. Conte Durante Durante.

Lasciato ha Emilia questo carcer frale,
Le grazie, le bell'arti, e il ver le piacque;
Per virtude, ed ingegno a Dei fu eguale,
Dissimil solo che immortal non nacque.

Altra Versione del Medesimo.

Tristes Emilia has sedes, noctemque reliquit,
Quæ verum atque artes, & Charites coluit.
Par genio superis, animo, virtute, decore;
Impar quod mortem vincere non potuit.

bene produrre in questo luogo (*Fig.* 1. *Tav.* 18.) tutti i binarj, o siano combinazioni a due a due, che risultano da 12. numeri, cioè dai dodici cilindri, o ruote dentate predette. E prendendo in detta *Fig.* 1. per esempio il binario $\frac{1}{7}$, vuol dire, che posto nel centro di un *mobile* il cilindro, o ruota 1, e nel centro dell' altro *mobile* il cilindro, o ruota 7, la velocità dei *mobili* sarà come 1 a 7. Onde per essere le velocità in ragion inversa del diametro de' cilindri, se sarà posto (*Fig.* 5. *Tav.* 15.) nel centro C del *primo Mobile* *nm* il cilindro, o ruota 7, e nel centro dell' *Epiciclo*, il cilindro, o ruota 1, mentre il *primo Mobile* percorrerà una sola settima parte della sua periferia, cioè l' arco *nm*, l' *Epiciclo* compirà un' intiera rivoluzione, e descriverà non pertanto una sola settima parte *aed* di tutta la Curva, che sarà un *Ettafoglio*.

A dilucidare maggiormente questa materia, fa molto a proposito il ricordare un piccol problema aritmetico, di cui con molto spirito, e acume d' ingegno è stato già (1) fatto uso nella fabbrica di un anello (*Fig.* 9. *Tav.* 14.) consistente in un filo di metallo ripiegato in sedici ben compartite spire, e disposte in forma di un cerchio. Questo lavoro, che devesi concepire non già piano, come in figura appare, ma tale che co' suoi giri un solido rappresenti, riusciva invero prestigioso, e mirabile, perchè il filo pareva stare da se equilibrato, e sospeso. L' artificio tutto consisteva nel suddetto problema, qual è: unire con sole linee rette successive, o una sola linea curva, e che ritornino in se stesse al primo punto di partenza, un numero qualunque di punti dati nella periferia di un circolo.

Il che in due modi si risolve: o (*Fig.* 2. *Tav.* 18.) conducendo la linea dal primo punto *a* sempre al più prossimo *b*, poi Q ec., che chiamo *modo comune* per essere as-

P 2 sai

(1) Cardano citato dal Weckero nel *Lib.* 17. *de Secretis*.

fai più tritto, e volgare, e per cui detta linea non fa più di un giro d'intorno al centro C; o tirando detta linea (e chiamo questo *modo elegante*) dal punto *a* (*Fig.* 3.) ad un altro *d* distante da *a* un tal numero di spazj, che non sia parte aliquota del numero dato; come il 3 numero de' spazj trapassati, che non è parte aliquota del numero dato 8. Perchè chi non vede che adoperando il 2 aliquota dell' 8, cioè tralasciando due spazj, in vece di un ottogono che si cerca, sarebbene venuto un quadrato? Conciossiacchè dividendo 8 per 2 il quoto sia 4? Nel caso dunque che si tralascino tre spazj, la linea gira intorno al centro, o punto C tre volte, avanti di ritornare al punto *a* d'onde ebbe principio.

Ma per lo più nella serie naturale de' numeri, il numero che prossimamente seguita o precede il numero dato, per esempio 8, dà nelle proprie aliquote il numero dei spazj, che hansi a tralasciare. Così nell' addotto esempio il 9, che prossimamente seguita 8, ha l'aliquota 3, che non essendo aliquota del numero dato 8., accenna il numero di detti spazj. Così pure quando per la costruzione dell' anello prestigioso (*Fig.* 9. *Tav.* 14.) furono dati 16 punti da unire, il precedente numero 15 somministrò nelle proprie aliquote 3, 5 il numero dei spazj da ommettersi; e in detta *Fig.* 9. fu scielto il 3, giacchè si vede che ciascuna spira di mano in mano tre spazj abbraccia. Coll' uso dell' aliquota 5, cioè con ommettere cinque spazj, l'anello sarebbe riuscito anche più bello, ed assai più intrecciato; e perchè nel primo caso il filo gira d' intorno al centro C tre volte, e cinque nel secondo caso, prima di riunirsi ad un punto qualunque *a*, d'onde incomincia; così non solo all' occhio, ma anche all' immaginazione, sfuggendo questo primo punto qualunque, e non apparendo in detto filo nè principio, nè fine, pare più tosto, che da se solo in alto stia sospeso.

Le

Le aliquote de' numeri, vietano anche che per ſtabilire le velocità de' *mobili*, ſi poſſa far uſo di tutti i binarj, o combinazioni; perchè il numero che ha un' aliquota inchiude ſempre quattro termini proporzionali. Il primo de' quali è il numero dato (per eſempio 10), cioè il numero da dividerſi. Il ſecondo l'aliquota, o ſia diviſore (ſia 2). Il terzo il quoto (ſarà 5), perchè un numero che ha un diviſore non può mancar di quoto. Il quarto l'unità (dico 1), che è miſura di tutti i numeri. Perciò, ſe uſo ſi faccia del binario compoſto del dividendo, e diviſore (cioè $\frac{10}{2}$), inutile diventa il binario compoſto del quoto, ed unità (dico $\frac{5}{1}$; eſſendo il dividendo al diviſore, come il quoto all'unità; eſſendo dico 10. 2. :: 5. 1. Laonde nell'iſtituzione del calcolo, e tavola delle combinazioni (*Fig.* 1. *Tav.* 18.) da ciaſcun di queſti ordini $\frac{1}{2}.\frac{2}{4}.\frac{3}{6}\ \frac{4}{8}.\frac{5}{10}.\frac{6}{12}$; $\frac{1}{3}.\frac{2}{6}.\frac{3}{9}.\frac{4}{12}$.; $\frac{1}{4}.\frac{2}{8}.\frac{3}{12}$; $\frac{1}{5}.\frac{2}{10}$; $\frac{1}{6}\ \frac{2}{12}$; $\frac{2}{3}.\frac{4}{6}.\frac{6}{9}.\frac{8}{12}$; $\frac{2}{5}.\frac{4}{10}$; $\frac{3}{4}.\frac{6}{8}.\frac{9}{12}$; $\frac{3}{5}.\frac{6}{10}$; $\frac{4}{5}.\frac{8}{10}$; $\frac{5}{6}.\frac{10}{12}$; conſervato un binario, ho cancellato gli altri, che ſi trovavano nella medeſima proporzione. Perchè egli è evidente, che, trattandoſi della deſcrizione di un *Trifoglio*, ſi potrebbe far uſo di due cilindri, o ruote ſegnate con li numeri 1, e 3 del primo binario $\frac{1}{3}$; 2, e 6 del ſecondo $\frac{2}{6}$; 3, e 9 del terzo $\frac{3}{9}$ ec., e nulladimeno, il reſto pari, non verrebbe mai più che un *Trifoglio*, eſſendo ſempre per eſſere eccitata nei *mobili* la medeſima ragione di velocità, come 1 a 3.

Per altro tutti i *Fiori*, eccettuato il *Trifoglio*, *Quadrifoglio*, e l'*Eſafoglio*, che con linee rette non permettono d'eſſer deſcritti, che pel ſolo modo *comune*, ſono capaci della deſcrizione *comune* ed *elegante*; ma meglio avviene a quelli, de' quali il numero denominatore è privo di parti aliquote, come l'*Endecafoglio*,

cafoglio, il di cui denominatore 11, essendo numero primo, prodigiosamente varia, potendosi in cinque modi descrivere con una linea retta, e in dieci con una curva; cioè nel primo caso adoperando ciascuna delle cinque aliquote 1, 2, 3, 4, 5 dei due prossimi numeri 12 e 10, restando soverchia l'aliquota 6 del 12, come complimento all' 11 della già usata aliquota 5; e l'aliquota 2 del 10, come comune anche al numero 12. Nel secondo caso si fa uso poi non solo delle suddette aliquote; ma ancora di tutti i complimenti all' 11, che sono il 10, 9, 8, 7, 6; facendo però, che il raggio dell' *Epiciclo* sia nel caso delle aliquote minore del raggio del *primo Mobile*; e nel caso de' complimenti, maggiore. Non altrimenti il *Decatrifoglio* per la medesima ragione può delinearsi in sei modi con linea retta, e con linea curva in dodici ec.

ARTICOLO SETTIMO.

Descrizione organica di Poligoni *quasi* rettilinei.

INtanto per alleviare il fastidio, che mi reca l'impossibilità di descrivere *Poligoni rettilinei* simili a quelli della *Fig.* 2. e 3. (*Tav.* 18.) e quali sono dagli empj Negromanti abusati nei stolti loro riti, voglio far vedere, che tre punti per lo meno *e*, G, *b* si può fare che vengano situati per dritto in una medesima linea; e che gli altri punti declinino talvolta quasi insensibilmente; essendo la via della retta così poco distante dalla via della curva, ch' egli è poco men che non coincidano, come dimostra la *Fig.* 8. *Tav.* 16.

Sia dunque dal centro C (*Fig.* 4. e 5. *Tav.* 18.) condotta C*a* perpendicolare ad *e*G*b*, corda di un arco qualunque *bae*, e l' assissa G*a* sia divisa per metà in *m*. E dipoi sia primo il raggio C*n* del *primo Mobile* eguale a C*m*, ed il raggio *nd* dell' *Epiciclo* eguale ad *ma*, ovvero *m*G. Secondo, la velocità

locità del raggio C*n* del *primo Mobile* sia alla velocità del raggio *nd* dell'*Epiciclo*, come l'arco *bae* a tutta una periferia. Terzo, i moti in verso contrario. Dico ora, che la Curva descritta dall'ultimo punto *d* del raggio *nd* dell'*Epiciclo* avrà per lo meno tre punti *e* G *b* situati in una medesima retta *e*G*b*.

Laonde si supponga, che, prima che i *mobili* fossero messi in moto, C*n* coincidesse con C*u*; ed *nd* con *ue*, ed *n*ζ. Cosicchè amendue costituissero una medesima retta C*e*. Indi partiti da questa prima posizione, ed in quella giunti, che la figura mostra, figuriamoci che il raggio C*n*, avendo percorso tutto l'angolo *u*C*n*, abbia fatta una quarta parte del suo viaggio: val a dire, una quarta parte di tutto l'angolo *ecb*; onde anche il raggio *nd* avrà fatta una quarta parte del suo, che è un quarto di circolo ζ*nd*. Allora il punto *d*, quantunque paret possa di trovarsi nella retta *e*G*b*, pure non vi sarà; ma quando C*n* giunto a coincidere con C*m* avrà fatto la metà del suo corso, cioè la metà dell'angolo *e*C*b*, anche il raggio *nd* avrà percorso la metà di un circolo, ed il punto *d* si troverà in G, perchè per la costruzione *nd* = *m*G; si troverà, dico, lontano da ζ, ovvero *a*, in cui ora s'intende che ζ coincida, due angoli retti. E così quando C*n*, arrivando per fine a coincidere con C*f*, avrà compito tutto il suo viaggio, che è tutto l'angolo *e*C*b*; anche *nd* sarà venuto a fin del suo, cioè avrà compita un' intiera rivoluzione, e *d* coinciderà con *b*. E perchè finalmente questi tre punti *e*G*b* sono dati per la costruzione in una retta, in quella appunto saranno dal punto *d* descritti. Ciò che era da dimostrarsi.

ARTI-

ARTICOLO OTTAVO.

Dettaglio delle cause moderatrici di ciascuna Curva posta per esemplare delle molte spettanti a questo Istromento.

SArebbe forse stato non ingiocondo spettacolo mostrare, oltre altre Curve, una serie seguita di tutti i *Fiori*, che descrive l'Istromento, principiando dall'*Unifoglio*, sino al *Dodecafoglio*; se non fosse, che io ho giudicato, che da que' pochi messi qui per esemplare dei molti che mancano, si avesse facilmente potuto prender idea anche degli altri; e che se non altro per mezzo della *descrizione per punti* suggerita nella prima parte di questo discorso, ciascun potesse farne nascere da se quanti vuole; avvisando per altro, che nè per l'ardente Sole dell'Estate, nè per le nevi, e ghiacci dello squallido Verno siano mai per diventare riarsi, o smorti.

Mi restringerò dunque a suggerire le cause moderatrici di questi pocchi *Fiori*, e Curve, e prima

Figura 1. *Tav.* 15. *Unifoglio*.

1. Raggio del I. *Mobile* sta al raggio dell' *Epicielo*, come 10 a 5 in circa.

2. Velocità del I. *Mobile* = a quella dell' *Epiciclo*.

3. Moto del I. *Mobile* in conseguenza del moto dell'*Epiciclo*.

* La punta *m* della Curva è moltiplice; onde se il raggio dell'*Epiciclo* fosse stato più lungo, detta punta si sarebbe aperta in un ceno, o nodo simile a quelli della *Fig.* 5. Questa nota vale per le punte di altre Curve soggette a questo Istromento, come la 3, 9 ec.

Figura 2. *Unifoglio*, *o Circolo*.

1. Raggio qualunque.
2. Velocità eguali.
3. Moti l' un dell' altro in verso contrario.

Fig. 3.

Figura 3. *Bifoglio*.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 10. $3\frac{1}{2}$ in circa.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 2.

3. Moti in conseguenza.

Figura 4. *Bifoglio*, *Elisse*, o *Linea retta*.

1. Raggi qualunque, purchè non siano eguali, perchè in tal caso diventa una *retta*.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 2.

3. Moti contrarj.

Figura 5. *Ettafoglio*.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 7. 2. in circa.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 7.

3. Moti in conseguenza.

Figura 6. *Ettafoglio*.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 2. 3. in circa.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 4. 7.

3. Moti in verso contrario.

Figura 7, 8, 9, 10, 11, 12, *Trifoglio*.

1. Sono queste quelle 6. figure citate nel calcolo delle Curve, le quali variano per il solo cangiamento della proporzione de' raggi, le altre cose rimanendo le stesse. Perchè il raggio del I. *Mobile*, che era maggiore di quello dell' *Epiciclo* nella *figura* 7, a poco a poco si è diminuito sempre più nella *figura* 8, 9, 10; finchè nella *figura* 11 detto raggio del I. *Mobile* è eguale a quello dell' *Epiciclo*;

anzi nella *fig.* 12. il raggio dell' *Epiciclo* è diventato maggiore del raggio del I. *Mobile*; e quindi per questo solo la Curva si trasforma nelle sei figure contenute nella *Tavola* 16.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 3.

3. Moti contrarj.

Figura 13. *Ottofoglio*.

1. Raggi eguali.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 5. 8.

3. Moti in conseguenza. Se contrarj, nasce la *figura* 14.

Figura 15. *Decafoglio*.

1. Raggi eguali.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo*:: 3. 10.

3. Moti contrarj.

* Sino a questa *figura* 15. la velocità dell' *Epiciclo* è stata maggiore della velocità del I. *Mobile*. Le figure poi che seguono 16, 17, 18 sono tre esempj di Curve provenienti dalla velocità di quello minore di quella di questo.

Figura 16.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 2. 1.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 2.

3. Moti in conseguenza.

Figura 17.

1. Raggio del I. *Mobile* minore alquanto del diametro dell' *Epiciclo*.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 1.

3. Moti contrarj.

Figura 18.

1. Raggi eguali.

2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 1.

3. Moti in conseguenza.

Sup-

Supponendo io ora che ciascuno che sia arrivato fin qui sia capace di comporre da se l'Istromento alle date cause moderatrici, mi basterà chiuder quest' Articolo coll'accennare, che per questo si divide il circolo in tante date parti, ma che non siano più di 12; primieramente usando per lo meglio binarj, che abbiano per un termine l'unità; come per esempio, volendolo dividere in sette parti, di questi binarj $\frac{1}{7}.\frac{2}{7}.\frac{3}{7}$, che si potrebbero adoperare, usando, dissi, piuttosto il binario $\frac{1}{7}$. Secondo, pongasi attenzione, che il raggio dell' *Epiciclo* sia piuttosto corto rispetto a quello del I. *Mobile*. Terzo, che i moti siano eccitati in verso contrario, onde veranno figure simili alle *Fig.* 7, 8, 9 della *Tav.* 16.; e per le punte di dette figure, e più precisamente delle simili alla 9, verrà diviso un circolo di diametro eguale al diametro del I. *Mobile*, più il diametro dell' *Epiciclo*, secondo l'addotto esempio, in parti sette: Cosicchè unendo poi dette punte con altrettante rette avrebbesi la descrizione finita di un *ettagono* rettilineo. Il che sia detto di qualunque altro *poligono*, mutando solo i binarj a tenore delle date velocità.

ARTICOLO NONO.

Descrizione organica delle Cicloidi *di base circolare*.

PEr dimostrare come appartengono a questa *Penna* le *Cicloidi* nascenti per lo volger di un cerchio su la periferia *convessa*, *o concava* di un altro cerchio, considereremo prima attentamente in qual disposizione di circostanze si ritrovi (*Fig.* 6. *Tav.* 18.) l'*Epiciclo afd*, che per descrivere una *Cicloide* cammina sulla immobile periferia *convessa doK*.

 Pri-

Primieramente osservo, che nel medesimo tempo che l'*Epiciclo* percorre tutta l'immobile periferia, anche il punto di contatto *d* compiendo sulla medesima il suo giro ritorna al punto *d* d'onde era partito; e perchè tanto avviene nel medesimo tempo, anche del centro *b* di detto *Epiciclo*, che al punto *b*, d'onde partì per la periferia *bgb*, ritorna (conciossiacchè il centro *b* si ritrovi (1) mai sempre nella direzione del raggio C*db*, che congiunge il punto di contatto *d* col centro C del cerchio immobile *do*K); perciò in tempi eguali il punto *d*, ed il punto *b* amendue formano eguali angoli al centro comune C. Onde io ne tiro questa conseguenza, che si potrebbe prendere il circolo *bbg* per *primo Mobile*, il di cui raggio C*b* sarà eguale al raggio C*d* del cerchio immobile più il raggio *bd* dell'*Epiciclo*.

2. Tante rivoluzioni fa l'*Epiciclo* sopra l'immobile *convessa* periferia *do*K, mentre il punto di contatto *d* al punto *d* d'onde partì ritorna, quante volte la periferia *do*K contiene la periferia dell'*Epiciclo*. Cioè a dire (giacchè le periferie sono in ragion de' diametri), quante volte il diametro *d*K contiene il diametro *ad*. E quindi sta il numero delle revoluzioni dell'*Epiciclo* ad una revoluzione del punto di contatto *d*, come il diametro *d*K del cerchio immobile *do*K al diametro *ad* dell'*Epiciclo*. Ma ho già detto che il punto di contatto *d*, ed il centro *b* dell'*Epiciclo* formano sempre eguali angoli al comune centro C. Dunque io concludo che la velocità angolare dell'*Epiciclo* è alla velocità angolare del suo centro *b* (cioè del *primo Mobile* *bgb*), come il diametro *d*K del cerchio immobile al diametro *ad* dell'*Epiciclo*.

3. A quel medesimo verso, che procede il punto di contatto *d*, non che il centro *b* dell'*Epiciclo*, per esempio a sinistra verso *o*, ed *b*, procede ancora qualunque punto *a* della

(1) Eucl. lib. III. prop. 14.

della periferia dell'*Epiciclo* a finistra verso *f*.

Poichè abbiam esaminato cosa accada, quando l'*Epiciclo* ruota sopra la periferia *convessa* di un altro cerchio immobile, vediam cosa succeda quando gira in una *concava*, cioè quando l'*Epiciclo dmx* ruoti nella *concava* periferia del cerchio immobile *do*K.

1. In primo luogo avviene, che il raggio C*e* del circolo *enp* (che sarà il *primo Mobile*) formato dal centro *e* del ruotante *Epiciclo dmx* è eguale al raggio C*d* del cerchio immobilè, meno il raggio *de* dell'*Epiciclo*.

2. Le velocità angolari del centro *e* dell'*Epiciclo*, e del punto di contatto *d* sono le medesime, perchè il centro *e* dell'*Epiciclo interiore* si ritrova puntualmente in quella medesima direzione, in cui già abbiam detto, che si ritrova il centro *b* dell'*Epiciclo esteriore*, cioè (1) nella direzione del raggio C*d*, che unisce il centro C col punto di contatto *d*.

3. In vece che i moti seguano come sopra in conseguenza, qui riflettendo attentamente si osserva, che occorrono in verso contrario.

Ora dato il raggio così dell'*Epiciclo*, come del cerchio immobile, su cui hassi a volger l'*Epiciclo*; dato di più se le revoluzioni di detto *Epiciclo* abbiano ad essere in una periferia *convessa*, o *concava*, chiaramente risulta, come ad una tal *Cicloide* debbasi componere l'Istromento. Supponiamo dunque che e l'uno, e l'altro sia dato. Sia dato C*d* raggio del cerchio immobile, al raggio *db* dell'*Epiciclo*, come 3, e 1; e s'intenda l'*Epiciclo* dover ruotare sopra la periferia *convessa do*K.

1. Primieramente dovendo essere il raggio C*b* del *primo Mobile* al raggio *ba* dell'*Epiciclo*, come la somma de' raggi del cerchio immobile, e dell'*Epiciclo*, al raggio dell'*Epiciclo*. sarà C*b*, *ba* :: 4. 1. Dove se nel determinare così nell'Istromento la lunghezza de' raggi s'incontrasse la dif-

ficol-

(1) Eucl. lib. III. prop. 13.

ficoltà (1) avvertita in propofito degli *affi* dati per la defcrizione di un' *Eliffe*, fi operarà come ivi fi diffe.

2. Dovendo effere la velocità del *primo Mobile bbg* alla velocità dell' *Epiciclo afd* in ragione inverfa de' diametri C*d*, *db*; la velocità di quello farà alla velocità di quefto, come 1 a 3.

3. Il *primo Mobile*, ed *Epiciclo* fi hanno a volgere al medefimo verfo. E però ordinato l'Iftromento a quefte leggi, o caufe moderatrici, il punto *a* della periferia dell' *Epiciclo* defcriverà la *Semi-Cicloide a o*, ovvero l'intiera propofta *zao*; l'ifteffa appunto, che verrebbe defcritta nel fuppofto dell' *Epiciclo afd* ruotante fulla periferia *conveffa d o*K.

Ma fe ftante ancora la medefima ragione di C*d* ad *ed* diametri de' cerchj dati, come 3. 1., l'*Epiciclo* non più fopra una periferia *conveffa*, ma in una *concava do*K fi volgeffe.

1. Primieramente dovendo effere il raggio *ce* del *primo Mobile* al raggio *ed* dell' *Epiciclo*, come il raggio *cd* del cerchio immobile, meno il raggio *ed* dell' *Epiciclo* al raggio dell' *Epiciclo*; farà C*e*. *ed* :: 2. 1.

2. La velocità del *primo Mobile* a quella dell' *Epiciclo* farà ancora la medefima: voglio dire, come 1. 3.

3. In quefto cafo i moti dovran feguire in verfo contrario. A tenore di quefte leggi regolato l'Iftromento, dal punto *x* della periferia dell' *Epiciclo xmd* verrà defcritta la *Semi-Cicloide xo*, ovvero l'intiera *zxo*.

Per quefti efempj fi potranno richiamare all' Iftromento tutte quelle *Cicloidi*, le quali fiano generate da' *mobili* commenfurabili, anzi de' quali le velocità fiano comprefe in quelle, che per la combinazione de' 12. cilindri, o ruote dentate rifultano, che fono 181. per lo appunto; cioè 45. per il cafo di un *Epiciclo* volgentefi fulla periferia *conveffa* di

(1) Part. III. Artic. IV. Annot. 7.

di un maggior cerchio immobile. Altre 45 per il caso, che l'*Epiciclo* si volga nella periferia *concava* di un maggior cerchio; sono pure 45 dove un *Epiciclo* cammina sulla periferia *convessa* di un minor cerchio immobile; indi altre 45 per il caso nel quale una periferia *concava* *do*K può camminare sopra la periferia *convessa* di un minor cerchio supposto immobile *dmx*; e finalmente una per il caso di un *Epiciclo* rotante sulla periferia *convessa* di un egual cerchio, restando due soli casi impossibili per questo genere di *Cicloidi*; cioè che un cerchio camminar possa nella periferia *concava* di un minor cerchio, o di un cerchio eguale.

ARTICOLO DECIMO.

Descrizione organica delle Spirali.

NOi ci troviam finalmente arrivati a quel genere di Curve, che furono le ultime nominate fra gli usi di questo Istromento, ma che per l'eccellenza loro furono in considerazione degli antichi, e lo sono ancora de' moderni Filosofi; perchè da quelli furono applicate alla quadratura del cerchio, e da questi ad altri usi. Ed in quanto alla loro generazione, per essere dipendente dal moto composto di retto, e circolare, se saranno (*Fig.* 7. *Tav.* 18.) descritti molti circoli concentrici, e dal loro comune centro C condotti molti raggi equidistanti, ed intersecantesi con le periferie di detti circoli, la linea condotta dal primo punto *a* d'interfezione al prossimo *g*, indi al vicino *b*, e così via via alli restanti punti K*mnoz*C, sarà una *Spirale*, che io chiamo *Circolare*; ma se in luogo dei circoli fossero date (*Fig.* 8.) tante *Elissi* parallele, e concentriche, sarebbero riuscite *Spirali* da me dette *Elittiche*. Tutte però nascenti da un punto *a* qualunque per la retta *a*C tendente al centro C, mentre detta *a*C si volge in giro. Il moto di questa

sta retta aC si suppone qui circolare; ed il moto del punto a per detta aC può essere equabile, ed inequabile; e sempre gli spazj am, mC fra una spira agbKm, e l'altra prossima $mnoz$C si trova in ragion composta della velocità del punto a per detta aC, e della velocità della medesima retta intorno al centro C. E quando la velocità della retta aC intorno a C sia equabile, e costante, li spazj am, mC saranno in ragione della velocità del punto a per detta *retta* aC. Qui pertanto si suppone che la *Fig.* 7. mostri una *Spirale* nata dal moto del punto a composto di di due movimenti uniformi, uno circolare d'intorno aC, e l'altro retto per la *retta* aC; cosicchè mentre per causa del primo la *retta* aC compie d'intorno aC una parte qualunque di un'intiera revoluzione, il punto a lungo detta *retta* aC proporzionalmente percorra una simil parte; e però questa è la *Spirale di Archimede*. La *Fig.* 8. poi è composta dal moto retto, ed elittico.

Si dovrebbero aspettare simili, e proporzionati effetti, secondo che il moto del punto a per la *retta* aC fosse accelerato equabilmente; o pure accelerato, o ritardato con qualunque variazione di velocità; dovendosi perciò la spira restringere, o allargare secondo la maggiore, o minore velocità, che sia in data ragione, si potranno immaginare *Spirali* innumerabili.

Ora per preparar l'Istromento (quello però de' fili) a queste Curve niente v'è di più facile. Perchè prima (*Figura* 3. *Tav.* 11.) condotta la punta S del raggio QS tra i due assi QG, RP, e fatto per modo che detto raggio soggiaccia per il lungo esattamente all'asta MN, si restringa poi validamente la vite P, onde tutto il corpo ombreggiato QRSdmP resti fermo, ed immobile nella sua guida n; ma la vite laterale n affatto si rallenti, acciò essa guida n diventi labile, e scorrente per il lungo della rotante asta MN verso M, portando seco tutto il corpo ombreg-

breggiato. Siano indi preparati quattro pezzi (*Fig.* 5. *Tav.* 11.) per la forma loro nominati il primo cilindro circolare, il ſecondo cilindro elittico, il terzo cono circolare, il quarto cono elittico; perchè meſſo nell'aſſe QG il primo di detti pezzi in vece del cilindro ZT (*Fig.* 3.), e facendo poi girare l'aſta MN ſi avvolgerà ſu detto pezzo il filo, che perciò tira tutto l'aſſe PR, in un con lo ſtilo S, verſo all'aſſe QG; e dallo ſtilo S verrà deſcritta ſul piano della carta la *Spirale* della *Fig.* 7. *Tav.* 18.; che ſe foſſe ſtato adoperato il ſecondo pezzo avrebbeſi conſeguita la *Spirale* della *Fig.* 8.; ſe il terzo, la *Spirale* aſſomigliarebbe alla ſettima, ſe il quarto all'ottava. Ma in queſti due ultimi caſi, li ſpazj fra una ſpira, e l'altra andarebbero decreſcendo, o creſcendo verſo il centro, ſecondochè il filo cominciaſſe ad avvolgerſi ſu detti pezzi terzo, e quarto dalla parte del vertice *m*, o della baſe *o*.

Qui poi è d'avvertire che il numero delle ſpire di queſte curve, ſarà ſempre eguale al numero delle rivoluzioni dell'aſta MN; ſecondo, che gli ſpazj *am*, *m*C (*Fig.* 7. *Tav.* 18.) fra una ſpira, e l'altra intercetti ſaranno eguali alle porzioni del filo, che ſi avvolgeranno d'intorno a detti pezzi per ciaſcuna rivoluzione relativa a detti ſpazj. E queſte porzioni di filo ſono eguali alle ſpire, che il filo avvolgendoſi forma ſulla ſuperficie dei ſopraddetti pezzi. Ma ſi è detto che gli ſpazj *am*, *m*C ſono in ragione della velocità del punto *a* per la retta *a*C; dunque le ſpire ſulla ſuperficie dei pezzi formate dal filo ſono in ragione di detta velocità. Onde ſegue, che per ottenere qualunque *Spirale* ſarebbe neceſſario ſapere la ragione di detti ſpazj per incidere (*Fig.* 5. *Tav.* 11.) ſulla ſuperficie dei ſolidi terzo, e quarto un incaſtro a ſpira in detta ragione, in cui vada il filo come ad innicchiarſi; perchè poi ſvilluppandoſi ſi generaſſe la *Spirale* propoſta. Ben è vero però, che così ſarebbe lo ſteſſo che far naſcere una *Spirale* da un'altra.

Per conseguire la soprariferita *Spirale d'Archimede* concepita da esso per (1) la quadratura del circolo, si carichino i due assi (*Fig.* 3. *Tav.* 11.) QG, RP di due cilindri eguali, e si faccia che il filo sia ben teso, e tangente detti cilindri alla medesima parte, perchè indi mosso l'Istromento verrà descritta la *Spirale* suddetta.

Suggerisco inoltre, che con il medesimo Istromento dette *Spirali*, quasi per rappresentare la forza centripeta, cominciando lungi dal centro ponno procedere verso il centro; e per contrario volendo fingere la forza centrifuga, possono esser descritte cominciando dal centro, come ha fatto il Sig. Abate (2) Nollet nelle sue sperienze.

Ma finalmente essendo esposti anche gli usi di questa *Penna Geometrica*, e spedito quant'era d'uopo nel supposto di un Istromento consistente in due mobili cerchj, parmi che dover sia passare alla seguente ultima Parte, per esaminare a quali usi sarebbe atto un Istromento simile, ma che di tre, o più di detti cerchj mobili fosse composto.

PARTE QUARTA.

Degli usi d'un Istromento simile alla suddetta Penna Geometrica. *Ma composto di un numero di* Mobili *qualunque dato.*

Avvegnacchè la maggior parte degli Uomini curi, ed ambisca quelle cose, che possono condurre a più alto stato di fortuna, o tal'altra cosa fornire, che più piaccia a questo nostro, cheche siasi, incomprensibile umano composto; pure quella parte di noi, che mente, e spirito si appella, talvol-

(1) Archimede dimostra nella prop. 18. delle *Spirali*, che (*Fig.* 7. *Tav.* 18.) dal punto *m*, termine della prima rivoluzione, menata nella Prodotta C*b* una tangente alla *Spirale*; lo spazio preso su detta retta C*b* da C fino all'incontro della tangente è eguale alla circonferenza del circolo che passa per *m*.

(2) Lezion. V. esper. 6.

volta schiva, o satolla di queste comuni cupidità, sollevasi a più nobili occupazioni, e gusta anche tali cose, che non possono a vil guadagno, nè a volgar diletto tornare. Così ora a me avviene, e molto più avverrà ad alcun altro, che sia per le geometriche verità di ben disposta mente. Perchè l'animo nella considerazione delle cose, che si trattano in questa Parte, benchè fossero anche per essere inutili, si estolle, e ricrea; e intanto per un tale trattenimento si dimentica delle ingiurie de' tempi, nè bada alle pur troppo spesse noje, e fastidj che ci stanno d'intorno.

Acciocchè dunque non si tardi ad entrar meco a parte di questo vero piacere, comincierò in questo primo Articolo a favellare della quantità delle linee provenienti dal moto di un Istromento, che a similitudine della *Penna Geometrica* fosse composto di un numero di *Mobili* qualunque dato. Negli altri Articoli poi la qualità di esse linee si dimostrarà; ma per non andare all'infinito si restringeremo alla *linea retta*, al *circolo*, alla *elisse*, ed alle *curve planetarie*.

ARTICOLO PRIMO.

Numero delle Curve provenienti da un Istromento composto di un numero de' Mobili *qualunque dato.*

Questo numero si determina assai prestamente, dopo che in altro (1) luogo fu trovato il numero conveniente nel supposto dell' Istromento composto di due mobili; perchè allora il *secondo Mobile*, o sia *Epiciclo* relativamente al *primo*, che perpetuamente descriveva un circolo, descrisse 1273 Curve. Ma poichè quelle tre cause moderatrici, che ivi valsero nel *secondo Mobile* rispetto al *primo* a produr tanta varietà, si suppone che qui vagliano le medesime nel *terzo* rispetto al *secondo*, perchè questo Istromen-

R 2

(1) Part. III. Artic. I.

mento deve esser simile a quello. Perciò il *terzo Mobile* per ciascuna Curva descritta dal *secondo* descriverà parimenti 1273 Curve. Dunque moltiplicato in se stesso il numero 1273 risulterà 1616529 numero delle Curve spettanti al *terzo Mobile*. Un simil discorso prova, che per determinare il numero delle Curve per il *quarto Mobile*, non si ha che moltiplicar in se stesso questo ultimo numero, e così per il 5, 6 ec. Onde se il primo numero 1273 derivante dal numero dei mobili dato 2 si chiama *a*, secondo che i mobili dell' Istromento saranno 2, 3, 4, 5 ec. il numero delle Curve verrà a. $a.^2$ $a.^4$ $a.^8$ $a.^{16}$ ec.

ARTICOLO SECONDO.

Linea retta, *ed* Elisse, *che nascono dal moto composto di tre cerchj*.

IL primo Problema, che in questa quarta Parte ci viene innanzi, parmi nel vero assai grazioso, ed è la descrizione di una *retta* per il moto composto di tre cerchj, per risolvere il quale, ricorrendo alle tre cause moderatrici, suppongasi (*Fig.* 1. *Tav.* 19.)

1. Che i raggi *dn* del *primo Mobile*, *ng* del secondo, *gb* del terzo siano eguali.

2. Che siano mobili con eguali velocità: Il primo *dn* d'intorno all'immobile centro *d* fisso nel piano: Il secondo *ng* intorno al proprio centro *n* fisso nella periferia del *primo Mobile*: Il terzo *gb* mobile intorno al suo centro *g* fisso nella mobile periferia del 2. *Mobile*.

3. Finalmente il raggio *ng* del 2. *Mobile*, ed il raggio *gb* del 3. si muovano in verso contrario del raggio *dn* del *primo Mobile*, che certamente il punto *b* descriverà la retta *ae*.

Laonde supponiamo che nella primiera situazione de' mobili, prima che fossero al dovuto lor moto eccittati, il raggio

gio *dn* del *primo Mobile* coincidesse con *dc*; il raggio *ng* del 2. *Mobile* con *cb*; ed il raggio *gb* del 3. *Mobile* con *ba*; cosicchè tutti costituissero una medesima retta. Indi mossi con le prefate leggi, *dn*, che coincideva con *dc*, da *dc* s'intenda receduto tutto l'arco *cn*; *ng*; che se anch'egli non si fosse mosso intorno al proprio centro *n* coinciderebbe con *nf*, perchè ha corso inverso contrario un egual spazio, si trova da *nf* lontano tutto l'arco *fg*; e così *gb*, che se non avesse girato intorno al proprio centro *g*, coinciderebbe con *gm*, lungi da questo è andato tutto l'arco *mb*. E però questi tre archi *cn*, *fg*, *mb* saranno eguali, perchè le velocità sono date eguali.

Richiamando ora alla memoria ciò che si è detto (1) per la descrizione del circolo, si troverà che qui concorrono tutte le cause moderatrici ivi addotte, perchè nel caso di due soli mobili, il raggio *ng* del *secondo Mobile*, mantenendosi sempre a se stesso parallelo, descriva il circolo *bgnd*. Onde si potrebbe fingere, che detto circolo fosse piuttosto descritto dal raggio *cg*, come rotante intorno al centro *c*; e prescindere per ora dai raggi *dn*, *ng*, come se non vi fossero, e come se non si trattasse d'altro, che dei due raggi *cg*, *gb*. Nel qual caso dico, che rispetto a questi due mobili si rincontrano qui tutte le cose, che (2) furon d'uopo, acciò il punto *b* descrivesse una *retta ae*; perchè per la costruzione i raggi *cg*, *gb* sono eguali; i moti accadono in verso contrario, mentre nel supposto che *cg* muovasi a sinistra verso *n*, *gb* per la costruzione volgesi a destra da *m* verso *b*. Resta ora da provare, che la velocità di *gb*, che sta ora per un *Epiciclo* immaginario, sia alla velocità di *cg*, che sta per un supposto *primo Mobile*, come 2 a 1. Ora quando *dn* con *dc*, *ng* con *cb*, *gb* con *ba* coincidevano; *cg* coincideva con *cb*, *gb* con *ba*. Ma poichè *cg* ha percorso l'arco *bbg*;

gb

(1) Part. III. Artic. V. (2) Part. III. Artic. III.

gb avrebbe dovuto coincidere con *gz*; ma per le stabilite velocità si trova ben lungi tutto l'angolo *zgb*, il quale essendo esteriore è doppio dell'angolo interiore *gcb*, e però risulta la velocità angolare del raggio *gb* rispetto alla velocità del raggio *cg*, come 2 a 1. Dunque il punto *b* descriverà la *retta ae*. Anzi per fortificar questa conclusione con un di più, prodotto *cg* in *z*, dico che l'angolo *zgb* è doppio dell'angolo *mgb* percorso dal raggio *gb* nel solo supposto della figura. Imperciocchè gli angoli al vertice *mgz*, *ngc* sono eguali; così gli angoli alterni *ngc*, *gcb* sono parimenti eguali. Dunque *mgz* = *gcb*; e perciò *zgb*, essendo doppio di *gcb*, sarà anche doppio di *zgm*. Dunque *mgz* = *mgb*; e però *zgb* doppio anche di *mgb*. Il che era da dimostrarsi. Ora senza frammettere alcun indugio all' altra Parte di questo Articolo, conchiudo, che il punto *b*, ovvero H, preso dentro o fuori dell' area del *terzo Mobile gb*, descriverà un' *Elisse*. Conseguenza, che ritenendo ancora il supposto de' due mobili *cg*, *gb* chiaramente risulta per la dimostrazione dell' *Elisse* addotta a suo luogo (1). Anzi quasi tutti i corollarj colà spettanti alla *linea retta*, ed *Elisse*, qui possono egualmente aver luogo.

ARTICOLO TERZO.

Circolo derivante dal moto composto di tre, o più cerchj.

SI è detto di sopra (*Fig.* 1.), che quando i due raggi de' mobili *dn*, *ng* muovendosi ebbero sortita la situazione, che la figura dimostra, il terzo raggio *gb* avrebbe coinciso con *gm*, se non si fosse mosso a destra da *m* verso *b* intorno al proprio centro *g*. Supponiamo pertanto (le altre cose tutte rimanendo), che piuttosto si sia mosso a sinistra da *m* verso *z*: val a dire in conseguenza del *primo Mobile* *dn*,

(1) Part. III. Artic. IV.

dn, allora il punto *b*, cioè *z* (*Fig.* 2.) si ritroverà nella periferia di un *circolo*, il cui diametro sarà la *retta a'e* descritta (*Fig.* 1.) dal punto *b*.

Essendo perciò *ng* (prodotto pur anche in *m*) sempre a se stesso parallelo, sarà parallelo sempre anche a *cb*, con cui prima di muoversi coincideva. Onde in grazia della dimostrazione sostituito anche qui *cg* al raggio *ng*, gli angoli *bcg*, *mgz* saranno eguali per causa delle supposte velocità. Ma le parallele *bc*, *mg* non potrebbero costituire alla linea *cgz* detti angoli eguali, se non fosse una medesima *retta*. Dunque *cgz* è appunto una medesima *retta*, che perpetuamente rotando intorno a *c* descrive il *circolo azе*. Il diametro del quale sarà eguale al raggio di un mobile quattro volte preso, perchè il semi-diametro *cgz* è eguale a due; ma la *retta ae* della *Fig.* 1. è parimenti eguale al raggio di un mobile quattro volte preso, imperciocchè nel massimo dilungamento o snodamento de' raggi $dn + ng + gb = da$, e nel massimo accorciamento di detti eguali raggi *dn*, *ng*, *gb* formano un sol raggio $= de$ residua porzione di detta *linea ae*; perchè per causa delle velocità si rannicchiano di modo, che *g* coincide con *d*; *b*, ed *n* col punto *e*. Dunque il diametro del circolo *aze* si eguaglia alla *retta ae*; e perciò s' intende verificata l'una, e l'altra parte di questa proposizione.

Ma per non menare in lungo una dimostrazione, cui potrebbe supplire una sola nuova figura, ricordarò che da' eguali mobili in numero qualunque dato, affetti di eguali velocità, rotanti l'un dell'altro alternativamente in verso contrario, si descriveranno dei *circoli* di diametri crescenti a due a due; cosicchè i diametri dei *circoli*, che verranno dal *Mobile* 1. 2. 3. 4. 5. 6., ec. cresceranno come 1. 1. 2. 2. 3. 3. ec. Inoltre la periferia del 1. 3. 5., e degli altri tutti che siano nella serie naturale de' numeri impari, coincideranno nel punto *e*; e le periferie del 2. 4. 6., e degli altri di numero pari in detta serie, coincideranno nel punto *d*.

to *d*. Si conturba questa legge, se i mobili sono dati ineguali, quantunque (ferme però che restino le altre cose) sempre risulti la descrizion di un *circolo*. E viene in via di corollario un' altra verità, che tutti i punti presi nella periferia, nell' area, e nel centro di tutti i *mobili* descrivono parimenti *circoli* concentrici rispettivamente al *circolo*, di quel tal *mobile* descrivente.

ARTICOLO QUARTO.

Linea retta, *ed* Elisse *vegnenti da tre mobili in altra maniera*.

PRimo, sia il raggio *dn* del *primo Mobile* (*Fig.* 3.) eguale al raggio *ng* del *secondo Mobile*, ed il raggio *gb* del *terzo Mobile* qualunque dato.

2. Siano le velocità del *primo*, *secondo*, *terzo* espresse dai numeri 1. 2. 1.

3. Il *primo Mobile*, ed il *terzo* si muovano in verso opposto del *secondo*. Dico che il punto *b* del *terzo Mobile* descriverà la *retta aq*.

Lo che per dimostrare suppongasi prima, come da me si suole, che *dn* con *dc*; *ng* con *cu*; *gb* con *ua* coincidessero. Quando in un tratto messi i *mobili* in moto il raggio *dn* del *primo Mobile* abbia già percorso l'arco da *c* ad *n*; *ng* l'arco da *f* a *g*; *gb* l'arco da H a *b*. Ora poichè l'angolo *fng* è doppio dell' angolo *ndg* (non solo per causa delle date velocità, ma anche perchè l'angolo *fng* al centro è doppio dell'angolo *ndg* alla periferia) sarà anche doppio dell' angolo *ngd*, cui è eguale detto angolo *ndg*, perchè opposto per la costruzione ad un lato eguale; e doppio del pari sarà dell' angolo *bg*H, perchè la velocità data del *secondo Mobile* è alla velocità del *terzo* come 2. a 1. Dunque l'angolo *bg*H deve essere all' angolo *ngd* eguale.

eguale. Essendo stato pertanto altre volte detto (1), che in simili circostanze dei due mobili *dn*, *ng*, il punto *g* si trovi costantemente nella *retta ue*; il raggio *gb* del *terzo Mobile*, recedendo dalla prodotta *ng* in H, verso *gb*, non può constituire l'angolo *bg*H eguale all' angolo al vertice opposto *ngd*, se non si mantiene sempre nella direzione *gd* coincidente con la detta *ue*; ma pure detti angoli sono constituiti eguali per causa delle date velocità. Dunque *gb* si mantiene in detta direzione *gd*, ovvero *ue*. Anzi di tal maniera in detta *linea ue* persiste, che egli è sempre a se stesso parallelo, e coincidente. Onde il punto *b* ultimo di detto raggio *gb* descrive tutta la *retta aq* = all'aggregato dei diametri di tutt' i mobili *a*K — K*q* diametro del *terzo Mobile*; e così dite di tutti gli altri punti dell' area, o periferia di detto *terzo Mobile*, che descriveranno delle *rette* parallele fra loro, e parallele alla *retta aq* coincidente con la suddetta *ue*.

Ma se intanto (le altre cose restando come sopra) la sola velocità del *terzo Mobile*, invece di esser suddupla di quella del *secondo*, fosse a quella eguale, cioè invece di esser l'angolo *bg*H eguale alla metà dell'angolo *fng*, *gb* si trovasse a coincidere con *gz*, e l'angolo *zg*H fosse eguale all'angolo *fng*; allora il punto *b* (dite *z* dove ora si suppone che stia il punto *b*), sarebbe nella periferia di un' *Elisse*, di cui l'*asse* maggiore sarebbe eguale all'aggregato de' diametri de' *mobili*; l'*asse* minore sarebbe $= + 2dn - 2ng + 2gb$; cioè che è lo stesso, $= + 2dl - 2ld + 2dm = + 2dm$.

Perchè trovandosi il punto H per le prove addotte nel luogo sopraccitato (2) nella circonferenza di un' *Elisse*; se il raggio *gb* faccia un altro arco da *b* a *z* eguale all'arco già fatto da H a *b* nel primo supposto; cosicchè gli angoli *fng*, *zg*H siano fra essi eguali, e ciascuno doppio dell'angolo *ndg*, il punto *z* si troverà da una parte in

S quella

(1) Part. III. Artic. III.

(2) Part. III. Artic. IV.

quella precisa situazione, che si trova H dall'altra. Onde benchè si trovi in parte a quella opposta, con tutto ciò sarà nella circonferenza della medesima *Elisse*. Perchè poi i raggi de' *mobili* in due opposte parti *a*, *e* K si dilungano in una *retta* $ad + d$K, l'*asse* maggiore viene ad esser eguale alla somma dei detti raggi due volte presa, cioè alla somma dei diametri. E perchè in due altre parti opposte verso *l*, ed *o* detti raggi si rannicchiano tutti tre in uno, cosicchè *n* coincide con *l*, *g* con *d*, *b* con *m*, l'*asse* minore risulta $= + 2dn - 2ng + 2gb$, cioè eguale $+ 2dl - 2ld + 2dm$; onde distrutte per li opposti segni le due eguali quantità $+ 2dl - 2ld$, resta di positivo solo $+ 2dm$ eguale al diametro del *terzo Mobile*. Tuttavia quanto si è detto (*Fig.* 3.) in proposito della generazione di questa *Elisse*, e quanto è vero anche nel caso della *Fig.* 4. (nel caso dico, che le altre cose stanti come sopra, i raggi *dn* del *primo Mobile*, ed *ng* del *secondo* non siano eguali, ma siano tutti tre qualunque dati) è bene che si confermi con una dimostrazione generale, che è la seguente.

ARTICOLO QUINTO.

Linea retta, *ed* Elisse *generate per il moto composto di un numero di cerchj qualunque dato*.

PRimo, dunque siano dati quanti, e quali si siano raggi de' *mobili* (*Fig.* 5.) C*n*, *nb*, *bb* ec., l'un all'altro insieme connessi.

2. La velocità del *primo Mobile* sia suddupla di quella di ciascun altro.

3. Tutti muovansi alternatamente l'uno dell'altro in verso contrario.

Dico che il punto *b* della periferia d'un qualunque ultimo dato *mobile*, si troverà nella circonferenza di un' *Elisse*

Elisse, di cui l'*asse* maggiore pareggierà la somma dei diametri di tutti i *mobili* dati, e l'*asse* minore sarà = al raggio due volte preso C*n* del *primo Mobile* — il due volte preso raggio *nb* del *secondo Mobile* + il due volte preso raggio *bb* del *terzo* — ec. (alternando sempre così la situazione de' segni opposti.

La linea GP eguale alla somma dei diametri dei *mobili* dati, sia tagliata per metà in C, e ad angoli retti dalla perpendicolare RC. Poi fatto centro in C si descriva il circolo PKG; indi nella perpendicolare CR sia trasportata la quantità C*e* eguale al raggio C*n* del *primo Mobile*; ed appresso fatto centro in *e*, si segni la quantità *ef* eguale al raggio *nb* del *secondo Mobile*; poi fatto centro in *f* sia *f*A eguale al raggio *bb* del *terzo Mobile*; e così via via sin che siano stati trasportati tutti i raggi de' *mobili* dati. Perchè per ultimo fatto di nuovo centro in C, e descritto un altro circolo A*p*B coll' apertura CA. AB sarà l'*asse* minore $= +2Ce - 2ef + 2fA = 2CA$. E l'*asse* maggiore sarà $GP = 2Cn + 2nb + 2bb = 2CP$.

Per provare ora che il punto *b* della periferia di un qualunque dato *mobile* sia nella circonferenza di un'*Elisse*. Sempre nella prodotta del raggio C*n* del *primo Mobile* si trasportino tutti i raggi, che nella serie de' *mobili* dati sono ne' luoghi impari. Qui ven'ha un solo *bb* raggio del *terzo Mobile*, e però si faccia *nu* eguale a detto *bb*. Poi dal punto *u*, che verrà qualunque per il punto *b* si tiri *uz* che occorra nella prodotta GP. Ora per causa delle date velocità, si può prescindere da tutti i *mobili* C*n*, *nb*, *bb* ec., come se non vi fossero, e come se la questione versasse sul solo raggio C*u* di un *primo Mobile* immaginario, e sul raggio *uz* pure di un supposto *Epiciclo*. I quali primo, sono eguali perchè opposti ad angoli eguali per causa delle velocità; secondo, la velocità del *primo Mobile* immaginario C*u* è suddupla di quella del supposto *Epi-*

ciclo uz, non ſolo a cagione delle date velocità, mà anche perchè l'angolo interno KCz, è ſudduplo dell'eſterno K*u*z; terzo, uſando attenzione verremo fatti accorti, che i moti procedono in verſo contrario. Onde per la dimoſtrazione veduta nel ſopraccitato luogo (1) riſulta, che il punto *b* del *terzo Mobile bb*, o ſia anche S di un qualunque altro *quarto Mobile b*S a quello anneſſo, o qual altro punto che ſi trovi nell'area del ſuppoſto *Epiciclo uz*, ſta certamente nella circonferenza di un' *Eliſſe*.

Ma ſe il *quarto Mobile* invece di eſſer eguale a *b*S foſſe più toſto eguale a *bz*, il punto z come punto della periferia del ſuppoſto *Epiciclo uz*, ſi trovarebbe aſſolutamente nella *retta* zPG. Simili eſempj ſomminiſtra anche la *Figura 6.*, perchè dato che ſia, per eſempio, da dimoſtrare che il punto *f* ſia nella circonferenza di un' *Eliſſe*, nella prodotta del raggio *ab* del *primo Mobile* ſi traſportino come ſopra i raggi, che nella ſerie de' *mobili* dati ſono in luogo impari, quali qui ſono due C*d*, ed *ef*. Si faccia dunque *bn* = C*d*. *nl* = *ef*. Poi dal punto *l* che verrà ſi tiri per il dato *f* in *g* la *retta lg*, che ſarà eguale ad *la*; e ſi fingano diſtrutti tutti i *mobili* dati, e non altri rimanere, che *al* raggio di un *primo Mobile* immaginario, ed *lg* raggio di un ſuppoſto *Epiciclo*. E poi ſi provi, come ſopra, eſſere il punto *f*, come preſo nell' area dell' *Epiciclo lg*, coſtituito nella circonferenza di un' *Eliſſe*. Inoltre ſe il punto dato foſſe *g*, perchè queſto *g* ſta nella periferia di detto ſuppoſto *Epiciclo lg*, ſi troverà coſtantemente nella *retta ao*.

Quindi ſi può primieramente raccogliere, che tutte le *Eliſſi* deſcritte (*Fig. 5.*) o dal punto *b*, o dal punto *b*, o dal punto S (così *Fig. 6.* dal punto *d*, dal punto *f* ec.) ſiano tutte concentriche; e di più anche parallele, ovvero ſimili quelle che ſaranno deſcritte da' punti preſi ſu

(1) Part. III. Artic. IV.

ſu d'un medeſimo raggio di un *mobile* nella ſerie numero impari, come quelle che ſarebbero deſcritte dal punto *b*, e punto *b*; perchè quantunque il punto *b* ſia ſtato conſiderato come ultimo del raggio *nb*, non reſta che inſieme non ſia anche primo del raggio *bb*; onde le *Eliſſi* deſcritte da queſti due punti, oltre l'eſſere concentriche, ſaranno anche parallele, perchè le loro periferie ſaranno continuamente diſtanti lo ſpazio *bb*, voglio dire, che ſaranno ſimili.

2. Che ſe i *mobili* ſono eguali, le *Eliſſi* non poſſono venir deſcritte che dai *mobili*, che nella data ſerie ſono ne' luoghi impari, come dal 3. 5. *Fig. 6.* Se poi non ſono eguali (*Fig. 5.*) ponno deſcriverſi da un *mobile* qualunque *nb*, *bb*, *bS* ec. eccettuato il *primo Mobile* C*n*, che deſcrive ſempre un circolo. La *linea retta* poi non viene deſcritta, che dai *mobili* che nella data ſerie ſono ne' luoghi pari, come dal *quarto Mobile* *bz* (*Fig. 5.*), e dal *ſecondo*, *quarto*, *ſeſto* (*Fig. 6.*).

3. Per ſapere (*Fig. 5.*) ſe un *mobile* *bz* che nella data ſerie ſia in luogo pari, deſcriverà una *retta* o no, ſi farà come poc'anzi ſi è fatto, per determinare l'*aſſe* minore dell'*Eliſſe* deſcritta dal punto *b*, e che qui giova ripetere. Tirata prima una *retta* GP*z* che ſtia per l'*aſſe* maggiore, e dal centro C del *primo Mobile* eretta una perpendicolare CR, ſi farà centro in C, e coll'apertura C*n* raggio del *primo Mobile* ſi ſegnerà in detta CR la quantità C*e*; poi fatto centro in *e* coll'apertura *nb* ſi noterà *ef*. Indi fatto centro in *f* coll'apertura *bb* ſi noterà *f*A; e per fine fatto centro in A coll'apertura *bz*, ſe *z* viene a coincidere nel centro C del *primo Mobile*, *z* ſi muoverà in una *retta*; ſe non coinciderà, il punto *z* non potrà fornire che un' *Eliſſe*.

ARTI-

ARTICOLO SESTO.

Cause moderatrici delle Linee messe per esemplari delle innumerabili derivanti dal moto composto di tre circoli.

NOn si può abbastanza ridire quanto nitide e leggiadre Curve nascano dal moto composto di tre circoli, e benchè n'avessi già preparate di bellissime descritte col metodo per punti; non ostante soppresse le migliori, ho ritenute queste poche più semplici; perchè dalla maggior parte di esse prendo occasione di fare a luogo qualche necessaria osservazione. Sono dunque:

Figura 1. *Tav.* 19.

1. Raggi de' *mobili* eguali.
2. Velocità eguali.
3. *Mobile* 2.°, e 3.° contro al 1.°

Figura 2.

Mobile 1.°, e 3.° contro il 2.°: Il resto come sopra.

Figura 3.

1. Raggi del 1.° *Mobile*, e 2.° eguali. Raggio del 3. *Mobile* qualunque.

2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 2. * Siami per brevità permessa, sempre che occorra questa espressione, la quale significa che le velocità del 1.°, 2.°, 3.° *Mobile* sono in proporzione ordinata, come li tre numeri 1. 2. 2.

3. *Mobile* 1.°, 3.° contro il 2.°

Figura 4. *e* 5.

1. Raggi qualunque.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 2.
3. L'uno dell'altro alternatamente in verso contrario.

Fig. 6.

Figura 6.

1. Raggi ſei eguali.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, 5.°, 6.° :: 1.2.2.2.2.2.
3. L'un dell'altro alternatamente in contraria parte.

Figura 7. Tav. 20.

1. Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 9.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 4.
3. *Mobile* 2.°, e 3.° contro al primo.

Figura 8.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 5. Il reſto come nella *figura* 7.

Figura 9.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 4. Il reſto come nella *figura* 7.

Figura 10.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 3. Il reſto come nella *figura* 7.

Figura 11.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 2. Il reſto come nella *figura* 7.

Figura 12.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 1. Il reſto come nella *figura* 7.

* Qui è da notare come dal ſolo raccorciamento del raggio del 3.° *Mobile*, riſulti quaſi per gradi la trasformazione della *Fig.* 7 in quella dell' 8, 9, 10, 11, 12, che ſono 6; numero che però con ragione anche nel calcolo delle Curve provenienti dal moto compoſto di tre *mobili* ſi è adoperato, come pure ſi fece nel calcolo inſtituito per quelle generate per il moto compoſto di due ſoli *mobili*.

Secon-

Secondariamente è d'avvertire che il 3.° *Mobile* descrive le sei figure suddette, mentre il suo centro è portato per la circonferenza di un'*Elisse*.

Figura 13. *Tav.* 21.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 4.
3. L'un dell'altro in verso contrario.

Figura 14.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 3.
3. L'un dell'altro in verso contrario.

Figura 15.

Il 2.°, e 3.° *Mobile* contro il 1.° Il resto come nella *figura* 13.

Figura 16.

1. Raggi eguali.
2. Velocità eguali.
3. Tutti in conseguenza. Se fosse il 1°, e 2.° contro il 3.°, verrebbe la *Fig.* 1. *Tav.* 15.

Figura 17.

1. Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 1. 1. Il resto come nella *figura* 7.

Figura 18.

Mobile 2.°, e 3.° contro il 1.° Il resto come nella *fig.* 14.

Figura 19. *Tav.* 22.

1. Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 2. 2. 3.
2. Velocità 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 4. 4.
3. Il 2.°, e 3.° contro il 1.°

* Notate, che nelle *figure* 13., 14., 15., 18., mentre il 3.° *Mobile* descrive la Curva, il suo centro è portato dal 2.° *Mobile* per una *retta*. Li archi però percorsi dal raggio del 3.° *Mobile* non sono nella medesima ragione delli spazj percorsi dal suo centro per detta *linea retta*. Ma ciò che è mi-

mirabile, questa *linea retta* descritta dal 2.° *Mobile* ritiene di maniera la natura di un' *Elisse*, che il resto pari, niente differiscono le Curve descritte da detto 3.° *Mobile*, o il suo centro sia portato nella periferia di un' *Elisse*, o nella direzione di detta *linea retta*.

Notate per ultimo, cosa maravigliosa, che per il moto composto di tre, o più *mobili*, si possono conseguire anche quelle figure regolari delle quali i lati siano quasi retti, come la *Fig.* 8. *Tav.* 16. E ciò che è molto più osservabile si possono combinare le cause moderatrici in diverse maniere, e nulla di meno fare, che venghi a risultare la medesima Curva proposta.

ARTICOLO SETTIMO.

Curve Planetarie del Signor di Varignon comprese negli usi di un Istromento di tre cerchj simile alla Penna Geometrica.

LA Curva determinata dal Sig. di Varignon (1), e che s'immagina essere descritta in un piano dal centro di un Pianeta, viene dal moto composto del centro di detto Pianeta progrediente nell' elittica speciale sua orbita, mentre detta orbita è portata dalla linea degli Absidi intorno a un foco. Onde l'Istromento dovrebbe esser composto di 3. *mobili*: due destinati a generar l'orbita elittica, ed uno a far, in luogo della linea degli Absidi, girare detta orbita. Conciossiacchè (2) altrove si sia rimarcato, come (*Fig.* 4. *Tav.* 15.) agli *assi* *ab*, *ed* di un' *Elisse* si determinino i raggi C*n*, *na* dei *mobili generatori*, muovendosi i quali con le dovute velocità, si conseguisca la proposta (sia per esempio di Mercurio ☿) orbita *aebd*. Ma qui si

T pre-

(1) *Memoires de l'Academie*. An. 1703. p. 348.

(2) Part. III. Artic. IV. Annotaz. III.

pretende inoltre, che mentre detta orbita si descrive intorno al centro C, l'*asse* suo maggiore, o sia la linea degli Absidi *ab* volgasi d'intorno al foco F; cioè (che torna lo stesso) sia il centro C di detta orbita dal raggio FC di un altro *mobile* CR portato per la periferia CR d'intorno all' *immobile* centro F.

Per lo che primo, sono necessarj tre *mobili*: Il *primo* CR, di cui è raggio FC; il *secondo* *zno*, di cui è raggio C*n*; il *terzo* *aqf*, del quale è raggio *na*.

2. La velocità del *primo Mobile* sarà alla velocità del *secondo*, come il moto dell'Affalio del Pianeta dato ☿ ad una intiera rivoluzione di detto Pianeta nella sua orbita; cioè a gradi 360. Imperciocchè mentre il *mobile* *zno* compie una rivoluzione, il punto *a* del *Mobile* *aqf* descrive l'intiera orbita *aebd*. La velocità poi del *secondo* a quella del *terzo* sarà come detta intiera rivoluzione, cioè gradi 360. ad una rivoluzione raddoppiata, che è 720. Perchè acciocchè i *Mobili* *aqf*, *zno* siano disposti ad un' *Elisse*, la velocità del *terzo Mobile* *aqf* deve essere doppia di quella del *secondo* *zno*.

3. I moti del *primo*, e del *terzo Mobile* saranno ad un medesimo verso, perchè così procede ad un medesimo verso tanto il moto dell'Affelio, come la direzione del Pianeta nella sua orbita: Voglio dire, che a quella medesima parte che l'Affelio avanza da C verso R, anche il Pianeta cammina sulla sua orbita da *a* verso *e*. Il moto poi del *secondo Mobile* *zno* sarà in verso contrario dell'uno, e dell'altro, cioè il raggio C*n* si muoverà verso *z*. Conciossiacchè non si possa dal *terzo Mobile* descrivere un'orbita elittica, se non cammina in verso contrario del *secondo Mobile*.

Per altro si vuole qui aver detto, come alla descrizione di queste Curve planetarie un Istromento compor si dovrebbe, ma non come si possa; anzi ella è per mio giudicio

dicio impoſſibile. Perchè eſſendo, ſecondo Keplero, il moto annuo dell' Affelio di Mercurio $= 1' . 45''$., e compiendo detto ☿ la ſua rivoluzione in giorni 87., il moto angolare dell' Affelio di ☿ corriſpondente a detti giorni 87. riſulta in circa $= 25''$. Perchè 365. (moto annuo dell' Affelio) 87. giorni (rivoluzione di detto ☿) :: $105''$. $\frac{9135}{365}'' = 25'' \frac{2}{73}$.

Laonde laſciando il rotto $\frac{2}{73}$, li ſecondi $25''$ ſtaranno per la velocità del *primo Mobile*, che rappreſenta il circolo dell' Affelio. Li gradi 360. per la velocità del *ſecondo Mobile*, che ſta per l' intiera rivoluzione di ☿ intorno al Sole, ed una doppia rivoluzione, cioè gradi 720. per la velocità del *terzo Mobile* ordinato a cauſare un' *Eliſſe*. Dunque le velocità del *Mobile primo*, *ſecondo*, *terzo* ſaranno in proporzione ordinata, come li tre numeri :: 1. 51840. 103680.

Ma perchè per eccittare i *mobili* alle dovute velocità, uſo da noi ſi fa de' cilindri, o ruote dentate che ſiano in data ragione; ſe il diametro di una ruota ſi determini di ſole tre linee del piede di Parigi, il diametro dell' altra verrebbe piedi 12960., il diametro della 3. ruota piedi 25920. E quantunque io ſappia, che ſi potrebbero diminuire i diametri di queſte ruote coll' accreſcere il numero di eſſe; nulladimeno i moti poi ne verrebbero aſſai più implicati, e l' effetto di queſti movimenti riuſcirebbe ſempre più difficile. Onde ſeguita che ſe ſi luſingaſſe taluno di comporre una Macchina preciſamente ordinata al preſente ſiſtema del Mondo, andrebbe molto errato, come ſi accennerà anche nel ſeguente Articolo.

ARTICOLO OTTAVO.

Difficoltà anneſſe al progetto di una Macchina rigoroſamente ordinata al preſente ſiſtema del Mondo.

BEnchè non ſia per anco nota agli Aſtronomi la diſtanza, e grandezza aſſoluta de' Pianeti, che ſi ſpera di poter determinare l'anno 1761. per il paſſaggio di Venere ſotto il Diſco Solare; nonoſtante ad ordinare una Macchina che rappreſentaſſe il preſente ſiſtema del Mondo, certo è che baſtano le diſtanze, e grandezze relative, ſu le quali, conforme il ſiſtema di Copernico (1), non laſciarono altri di proporne una ingegnoſiſſima, ed un'altra a ſpiegare i fenomeni de' corpi celeſti, è ſtata, non a molto, inventata dal Chiariſſimo Sig. Gaſparo Charlton (2). Ma una trovarne nel ſuppoſto delle orbite elittiche, e che regga anche al moto degli Affelj, parmi per ogni modo aſſai difficile. Concioſſiacchè nella Macchina ordinata al ſiſtema di Copernico, invece delle orbite elittiche erano, per quanto ho inteſo dire, circoli eccentrici, nei quali apparivano i Pianeti progredire con velocità proporzionate ai tempi. Così ivi non erano i moti degli Affelj, nè di vertigine (ſe non quello della Terra, e del Sole); ma due ſoli moti: un principale che traeva la Macchina, dirò così, dalla ſua immobilità, ed un altro da quello dipendente, onde ciaſcun Pianeta camminava nella ſua orbita. Ma nel caſo noſtro occorrebbe un principal movente, che nella data ragione promoveſſe i centri di ciaſcun Affelio. Da queſti dipendono due altri *mobili* affetti per mezzo di molte ruote delle dovute velocità per formare le orbite elittiche. Indi

i globi

(1) Una ven'ha a Firenze fra le macchine di S. M. Imper.; un'altra ven'è in Padova del Sig. Dott. Maſſ. Intendò dire che una pur ſtupenda ſia in Vienna, ed un'altra a Leiden.

(2) In Londra l'anno 1735.

i globi rappresentanti ciascun Pianeta, di cui sia noto il moto proprio di vertigine, dovrebbero con una certa legge volgersi d'intorno ai proprj *assi*. Facendo questi col piano delle orbite rispettive quell'angolo, che fosse altresì noto. Poichè già si sa che peranche non si è dagli Astronomi rilevato nè il moto di vertigine di Mercurio, e Saturno, nè l'angolo che probabilmente anch'essi fanno con la loro orbita; perchè o il troppo splendore del Sole vicino, o la enorme lontananza vietò fin'ora, che gli osservatori del Cielo discernessero le macchie, onde giudicarono detto angolo, e moto di vertigine degli altri Pianeti. Se poi dovessero in questa Macchina aver luogo anche i Pianeti secondatj, la Luna, i satelliti di Giove, e di Saturno, ed il suo stupendo anello, la cosa andrebbe tanto innanzi, che ingegno umano non vi potrebbe per niente. Pure quando non si badasse al moto degli Asse[illegible], che a se soli obbligano tante ruote, il progetto prenderebbe nel resto qualche probabilità; e si potrebbe forse sperare che in Città, dove si trovassero grandi Matematici, ed insigni Artefici si potesse in alcuni anni ben condurre una tal opera; costruendola appunto Pianeta per Pianeta a similitudine della mia *Penna Geometrica.* Ma chi sa?

Forse un dì fia che la presaga Penna
Osi scriver di ciò, *quel ch'or n'accenna.*

ISTRO-

ISTROMENTO X.

ARTICOLO PRIMO.

Per la descrizione organica della Loxodromia, *e de' Poligoni rettilinei regolari*.

DOvendosi nel genere de' circoli non senza ragione comprendere anche le spirali, e la linea retta, quelle come periferie di un circolo, che attualmente s' incammina all' infinito, questa come periferia di un circolo già arrivato all' infinito. Ben si scorge, che il compasso comune, come mancante di dette linee, è (ciò che nissuno avrebbe mai creduto) in un certo modo imperfetto. Al quale però per tal cagione, parmi che sia preferibile il seguente, il quale, mentre da me vien ordinato alla *Loxodromia*, non può non descrivere le tre suddette linee *circolo*, *spirali*, e *linea retta*. Imperciocchè supposto che la *Fig.* 2. (*Tav.* 23.) sia parte della superficie di un Globo terraqueo, quando viaggia un Bastimento sempre cammina o sopra un dato parallelo QE, BA ec., o sopra un dato meridiano PQ, PG ec., o sopra una linea curva LE detta *Loxodromia*, di cui una semplice proprietà è, che la sua tangente forma con tutti i meridiani un dato angolo PLE, PCE, PHE ec. sempre il medesimo. Però devesi aver cura, che la fabbrica del presente Istromento abbia rapporto a tutte queste differenti direzioni per descriverle, quando che sia, sopra il suddetto Globo.

Compasso Loxodromico adunque chiamo propriamente il proposto Istromento (*Fig.* 1.-*Tav.* 23.) come quello che, quantunque da me s' impieghi a descrivere anche alcuni *Poligoni regolari*, specialmente però è stato concepito per la suddetta *Loxodromia*. Egli è nel vero un *compasso*, di cui l' un piede MC sempre sta fisso in un punto C, l' altro MV termina

mina in una ruota R mobile intorno ad un piccol ganghero, che occupa il ſuo centro, e che indi ſi piega, e con una cannetta V abbraccia, e poi con una viterella ſta fermo a detto piede MV. Ma girando la cannetta V intorno a detto piede, prima di ſtringer la vite, ſi può fare, che il piano della ruota rappreſentato per *xz* coſtituiſca ſul piano della carta col raggio RC, ovvero *rc*, un angolo *crz*, ovvero *crx* eguale ad un qualunque dato. La noce poi, o nodo M deve eſſer aſſai più labile, e preſto che negli altri compaſſi non è.

Da queſta ſemplicisſima coſtruzione ſeguita: Primo, che ſe il piano della ruota *xz* faccia col raggio RC un angolo retto, riſulti la deſcrizione di un *circolo*, il quale è maggiore, o minore, ſecondo che da prima il compaſſo aveva maggiore, o minore apertura; la quale apertura volgendo l'Iſtromento non può alterarſi, perchè non eſſendo la ruota inclinata più da una parte, che dall'altra, non può nemmeno mordere la carta o più in fuori, o più in dentro, onde ſi allarghi, o ſi ſtringa il compaſſo. Secondo, ſe il piano della ruota *xz* non fa verun angolo con detto raggio RC, aprendo ſempre più l' Iſtromento, ma non già muovendolo in giro, ſi deſcrive una *retta*, da cui per la medeſima ragione addotta, non può mai declinare. Terzo, ſe il piano ſuddetto forma con detto raggio un angolo qualunque che non ſia retto, e muovaſi poi in giro l'Iſtromento o dalla parte dell'angolo ottuſo *crx*, o da quella dell'acuto *crz*, perchè e nell'uno, e nell'altro caſo la ruota inclinata può mordere o più in fuori, o più in dentro la carta, o nel primo caſo dilungaſi ſempre più dal centro C, o nel ſecondo s'accoſta, e ſeco trae il piede MR, e lo determina a formar con l'altro piede MC l'angolo RMC o ſempre più, o ſempre meno aperto; e quindi intanto dal margine dentato di eſſa ruota deſcriveſi ſul piano della carta una *ſpirale*, la quale viene appunto

ad

ad essere la proposta *Loxodromia*, perchè il piano della ruota; cioè la sua tangente (giacchè il piano della ruota è sempre per la costruzione tangente alla curva) in qualunque posizione forma col raggio CR un angolo costante.

L'Istromento da me perciò messo in prova somministra gentilmente queste tre linee, che sono un'immagine in piano delle curve, che un Bastimento descrive sulla superficie sferica del Mare. Perchè il centro C (*Fig.* 1.) si può prendere (*Fig.* 2.) per il Polo P.; il raggio CR mobile intorno a C per un meridiano, che come rotante intorno a detto Polo P, serve per tutti gli altri meridiani PQ, PG ec. Il piano xz della ruota R, costituente con detto raggio rc un angolo qualunque, può tutti i rombi della rosa nautica rappresentare. Onde quando di questo compasso l'un piede MC fosse posto nel Polo P (*Fig.* 2.) di un globo terrestre artefatto, l'altro, secondo che il piano della ruota diversamente inclinasse a detto raggio CR (*Fig.* 1.); ovvero PQ, PG ec. (*Fig.* 2.) descriverebbe sulla superficie di esso globo, o qualunque parallelo QE, BA ec., o un qualunque meridiano PQ, PG ec., o la *Loxodromia* LE conveniente ad un rombo, o sia angolo *Loxodromico* qualunque dato.

Ma quantunque io stia sicuro, che la prefata costruzione non possa mancare del divisato effetto, tuttavia mi parrebbe ben fatto (ciò che però non è precisamente possibile) che la ruota R (*Fig.* 1.), invece di cangiar quell'angolo d'inclinazione verticale, che fa col piano orizzontale, cioè l'angolo MRC, stasse piuttosto del tutto verticale a detto piano, qualunque fosse l'apertura RMC. Onde volendo che, per quanto meccanicamente è permesso, l'Istromento supplisca anche a ciò, dovrà esser concepito di maniera che (sia sopra una superficie *piana*, sia sopra una *convessa*) la ruota sempre appunto si mantenga verticale a detta superficie.

Per

Per la *superficie piana* potrebbesi ideare l'Istromento come nella *Fg.* 3., facendo che un regolo RH si unisse nel sito inferiore all'estremità R di una verghetta MR mobile d'intorno al punto M dell'asta CH; e nel sito superiore ricevesse in una fessura l'estremità H di detta asta CH. Perchè per le dottrine altrove (1) esposte, quando MC, MH, MR saranno eguali, muovendo l'Istromento intorno al centro C, e qualunque apertura CMR acquistando sempre il punto H, caderà perpendicolarmente sul punto R; e però il regolo RH sarà sempre verticale al piano RC; e conseguentemente anche la ruota, che per mezzo della cannetta, e vite V devesi connettere col suo pivolo parallelo a detto regolo RH, procurando che la sola ruota, e non già il regolo RH giunga a toccare il piano della carta.

Nel caso poi della *superficie sferica* RP (*Fig.* 4.) fermisi la ruota R con la vite ad un gambo R*d*, che sia parte d'un parallelogrammo, snodato, e composto di quattro regoli, delli quali li R*d*, RM, *dq* siano eguali al semidiametro del dato globo; e il regolo P*q* eguale a tutto detto diametro PA. Imperciocchè avverà, che quando con il regolo *q*P fatto centro in P, e la mano posta in M si faccia muover in giro l'Istromento, qualunque sito R i denti della ruota acquistaranno rispetto al Polo P, nulladimeno il piano del gambo *d*R parallelo al piano di essa ruota, si conserverà sempre verticale a detto globo, e prodotto passerà per mezzo del suo centro. Il che è evidente, perchè dai punti P, ed R condotti al centro C i raggi RC, PC; essendo CR, RM, MP, PC per la costruzione eguali, le rette CR, PM saranno parallele; ma PM è per la costruzione parallela anche a *d*R. Dunque giacchè ambidue *d*R, RC sono parallele ad una medesima retta MP, sono anche poste indiretto verso il centro C.

V Val

(1) Istrom. IX. Part. III. Artic. II.

Val a dire che *d*R non inclinerà verſo A, o verſo P punti preſi ſu quel medeſimo meridiano, che paſſa per i due punti P ad R. Quindi quel diametro della ruota, che paſſa per il punto di contatto R, ſarà per ogni verſo verticale alla ſuperficie del detto globo, e per conſeguenza prodotto paſſerà ſempre per il ſuo centro C.

Per altro l'Iſtromento della *Fig.* 3. può ſervire anche a quello della 4. con l'aggiunta d'un ſolo regolo *qd*. Ma ciò che manca nell' una, e nell'altra coſtruzione è, che l'eſtremità R del regolo MR, e il margine della ruota non ponno, come dovrebbeſi, e come abbiamo detto pure in principio, giungere a toccare eſattamente nel medeſimo piano.

ARTICOLO SECONDO.

Deſcrizione organica de' Poligoni rettilinei regolari.

QUantunque la *Penna Geometrica* ſuppliſca, ſiccome abbiam accennato, facilmente a queſt' uopo, non oſtante perchè queſto Iſtromento meno importa di ſpeſa, ed è sì nell'uſo, che nella coſtruzione più ſpedito, ſembrami perciò preferibile a quella. E' dunque da conſiderare in queſta organica deſcrizione de' Poligoni, che ella ſi potrebbe concepire in due differenti, ed egualmente facili maniere; cioè o ſupponendo coſtante un medeſimo circolo che debba circoſcriverſi a' detti Poligoni, e modificando la lunghezza de' lati far sì, che un medeſimo circolo veniſſe a circoſcrivere diverſi di detti Poligoni: o tenendo fermo, e coſtante un medeſimo lato, modificando il circolo circoſcrivente, far che un medeſimo lato divenghi lato di diverſi Poligoni. Un eſempio del primo caſo ſarebbe, ſe foſſe deſcritto un circolo per i punti *a*, *c*, *d* della *Fig.* 2. *Tav.* 18., perchè detto medeſimo circolo verrebbe circoſcritto ad un Pentagono di cui ſarebbe lato *ad*, ed inſieme da un decagono di cui ſarebbero *ac*, *cd* due lati.

La

La medesima figura somministra un esempio anche del secondo caso, in cui *qd* lato di un Pentagono descritto nel circolo *abQ*, sarebbe anche lato di un decagono descritto in un circolo, di cui fosse *a* il centro, e raggio la retta *ad*. Queste cose sono evidenti, ed è superfluo il trattenervisi di più, e lasciando per ora di produrre un Istromento relativo al primo caso, applicarò solo al secondo il presente Istromento della *Loxodromia*.

Laonde suppongasi primieramente, che nell'area della ruota R (*Fig.* 1. *Tav.* 23.) sia dal centro verso alla periferia R scolpita una cavità, in cui, come in quella delle penne de' compassi, messovi dell'inchiostro, possa detta ruota lasciare per ogni sua rivoluzione segnato un punto sul piano della carta, secondo sia il compasso corredato di un quadrante NQ fisso al piede CM in Q, e labile nell'altro piede MR, se non si stringe con la vite, terzo si fermi con la vitarella V la cannetta, che porta la ruota R, qualora il piano di essa ruota sia ad angoli retti del raggio CR.

Ora poichè le periferie sono come i diametri, supponendo che il raggio della ruota R fosse al raggio CR, come 1 a 3, la periferia della ruota sarebbe alla periferia del circolo descritto sul raggio CR, come 1 a 3. Sicchè (relativamente al già detto anche in proposito (1) delle Cicloidi di base circolare) farebbe la ruota R tre rivoluzioni, mentre una ne facesse il raggio CR intorno a C; e quindi sulla periferia generata da detto raggio CR, verrebbero marcati tre punti, i quali fornirebbero un triangolo, quando fossero uniti con altrettante rette. Perciò quando il raggio della ruota è al raggio CR precisamente come 1 a 3, facciasi sul piano laterale del quadrante NQ un segno, con insieme affisso il numero 3., nel punto in cui la gamba MR, stante tale apertura, traversa detto quadrante. Indi aprendo l'Istromento finchè il raggio della ruota sia al

(1) Istròm. IX. Part. III. Artic. IX.

raggio CR, come 1 a 4, s'incida poi su detto piano un altro segno con il numero 4 annesso ec., finchè per qualunque altra divisione si giunga a segnare su detto quadrante il segno corrispondente alla proporzione di 1 a 5, di 1 a 6, di 1 a 7, di 1 a 8, fin'a quella di 1 a 12, e più ancora se piacesse di portar l'affare anche più oltre.

Ora quando occorresse, per esempio, la descrizione organica del Ettagono, aprasi da prima l'Istromento preparato così con la maggiore esattezza, finchè la gamba MR arrivi, traversando il quadrante, a collimare, e coincidere nel segno appuntino che accompagna il 7 numero scolpito, come sopra, nel piano laterale del suddetto quadrante, ed ivi con la vite si arresti; perchè facendo indi muovere in giro l'Istromento, la ruota R farà 7. rivoluzioni intanto che il compasso n'avrà compita una intorno al centro C; e quindi resteranno sul piano della carta segnati dalla ruota 7. punti distribuiti in eguali distanze sulla periferia del circolo descritto con il raggio CR intorno a detto centro C; i quali uniti poi con altrettante rette verranno a fornire l'Ettagono proposto.

E' superfluo l'avvertire: Primo, che se dato fosse qualunque altro Poligono da descriversi, avrebbesi ad aprire l'Istromento fino al numero corrispondente a quel tal'altro Poligono dato. Secondo che volendo un dato Poligono, o più grande, o più piccolo, dopo segnati nel piano i punti del Poligono dato, e prima d'unirli con altrettante rette, basta condurre de'raggi indefiniti dal centro C a detti punti, e fatto centro nel medesimo C, tagliar detti raggi con un qual altro maggiore, o minore circolo che più piace; giacchè è evidente, che le rette congiungenti i nuovi punti d'interfezione sarebbero tuttavia lati del medesimo proposto Poligono. Terzo si potrebbe pensare, e di leggiero riuscire nella fabbrica di una tal ruota R, la quale lasciasse segno sulla carta, quando di tutta la sua periferia, e quando di un sol punto, acciò la medesima potesse agevolmente, e comodamente servire tanro per la descrizione della *Loxodromia*, quanto per quella de' Poligoni.

FINE DEGL' ISTROMENTI.

QUADRANTE
LOXODROMICO

O' SIA

Istromento per rilevare la quantità del viaggio di un Bastimento.

PREFAZIONE.

Acciocchè la scienza del Mare salga all'ultimo grado di perfezione, niente più restando (trattone se sempre si potesse navigare per il Rombo esattamente), che poter determinare i gradi di Latitudine, e Longitudine del Luogo in cui si è, senza dover ricorrere alle osservazioni del Cielo, che spesso ci vien tolto di vista dall'importune nubi; e perciò essendo mestieri di attenersi alla Terra, altri già tentarono in varj modi questa comodità procacciarsi. Ma o che il Sommo Autore d'ogni bene voglia riservar questo vantaggio ad altri più fortunati tempi avvenire, o che pur anche non sia mai per concederlo, certo è che qualunque argomento finora adoperato, riuscì alla prova quasi che affatto inutile. E benchè forse tanto sia per essere anche di un Istromento proposto a tal uopo da me, pure non ho dubitato di produrlo, non per vaghezza di lode, o di premio, ma perchè parmi dovere che le nuove cose, qualunque siansi, si rendano pubbliche. Conciossiacchè spesso occorra, che per la debolezza dell'ingegno umano le invenzioni primitive non giungendo sino a quel fine cui erano indirizzate, le vi furono poi recate da altri, che calcarono quelle medesime vestigia.

Intende per tanto il mio Istromento a manifestare in un Quadrante la quantità del viaggio percorso da un Bastimento; data la quale insieme coll'Angolo Loxodromico, e la Latitudine del Luogo d'onde si sciolse, si rileva la Latitudine, e Longitudine del Luogo, in cui si è.

ARTI-

ARTICOLO PRIMO.

Descrizione d'una Macchina Drom-hydro-metra applicata a misurare il viaggio di un Bastimento,

PErduto il Cielo, parmi di ravvisare in Terra tre luoghi, nei quali siano per essere con commendabile industria collocati gl'Istromenti costrutti per l'effetto suddetto. Il primo nell'aria, applicandogli a misurare la forza de' venti, per quindi il viaggio dei Bastimenti rilevare; come pensarono il Chiarissimo P. Milliet, ed il Celebre Sig. Marchese Poleni, cui per ciò immortal gloria ne avvenne. Il secondo è sulla superficie del Mare, dove Vetruvio, e Mellio consigliarono che fosser poste delle ruote mobili per lo andare del Bastimento. Il terzo (stato finora, ch'io sappia, impensato da altri) è da me scelto sott'acqua. E avvegnacchè le ruote proposte da Vetruvio, e da Mellio soggiacciano ad alcuni (1) difetti; tuttavia per le difficoltà, che s'incontrano anche negli altri Istromenti, (presa l'idea da una ruota già fin dello scorso secolo inventata (2) per il moto perpetuo) ardisco richiamarle in pratica, come quelle che immerse a grande altezza d'acqua, pare (bene, o mal che mi apponga) che ci avrebbero a promettere miglior fortuna.

Si osservi dunque, che nella *Fig.* 1. *Tav.* 24. è delineato il piano di un Timpano di legno, o di metallo, vuoto nel mezzo, e che deve essere dentro, e fuori lavorato al torno perfettamente, e mobile d'intorno al proprio asse R, secondo l'ordine dei numeri 1, 2, 3, 4 ec., corredato di 8. ali di ferro distribuite in eguali distanze sulla sua peri-

(1) Ricordati da Claudio Perralto nelle sue osservazioni sopra Vetruvio, e del Sig. March. Poleni nella sua maniera di misurare il corso di una Nave.

(2) Da Alessandro Capra nella sua Architettura civile, e militare.

periferia. Queste ali s'intendano snodate, e mobili su i rispettivi gangherini in modo, che se il centro della loro gravità cade dentro il piano di esso Timpano, rimanghino ferme, e distese sopra detta periferia; se cade fuori del piano a destra, cadano anch' esse, e per l'intoppo di un calcagnetto (lungo la 5. parte in circa della lunghezza di dette ali) rimanghino nella direzione de' raggi R 7, R 9, se per fine il centro della loro gravità cada oltre detto piano a sinistra, pendano giù liberamente, e solo restino ai piccoli gangheri sospese. Sarebbe fors' anche non inutile l'adattare, come in *Fig.* 4. di qua, e di là dall'ali un cuojo quinci affisso alle coste 9, *p*; 7, *d* dell'ali, e quindi all'orlo del Timpano 9, 7; 7, 5; in guisa che caduta l'ala si aprisse a destra una sorta di cassetta, o seno, che poi oltre 9 a sinistra tornasse a racchiudersi, servendo in tal caso il cuojo a ritener l'ali senza altro calcagnetto.

Un simil Timpano alato, come in *Fig.* 1., ovvero 4. si può considerare mobile sott' acqua, quando la parte destra si opponga alla corrente di un fiume. Perchè supponendo, che tutta la massa d'acqua compresa tra le parallele *im*, *pd* vada da *m*, *o*, *n*, *d* ad avventarsi contro il Timpano R, egli è fuori di dubbio, che la massa I*m*, 9 *n* non farebbe volger il Timpano, quando si supponesse privo d'ali. Perchè la forza della porzione *o* 5, *n* 9, che tenta muoverlo secondo l'ordine dei numeri, essendo eguale alla forza contranitente della porzione *o* 5, *mi*, che urta nel medesimo Timpano dalla parte opposta; il Timpano viene costretto a rimanere in equilibrio. Ma la massa intercetta tra le parallele *n* 9, *dp*, che urta nell'ala 7, e nell' ala 9*p*, perchè non incontra dall'altra parte un'egual resistenza, trae esso Timpano d'intorno al suo centro. Onde si può esso Timpano ragionevolmente chiamare Dromhydro-metra, poichè si può meglio d'ogni altro usato

Istromento adattare anche alla misura dell' acque correnti, cioè per rilevare le loro velocità relative, che in un medesimo dato tempo debbono essere, come il numero delle rivoluzioni di detto Timpano.

Ma se in vece di supporre il centro del Timpano R immobile nel suo sito, e l'acqua in cui è immerso, corrente per la direzione *o* R, si supponga piuttosto che sia stagnante l'acqua (o qualunque altro liquore in cui fosse immerso l'Istromento), ed il centro R tirato per la retta R*o*; siegue nientedimeno il medesimo effetto. E di questa maniera sarebbe applicabile a rilevare la gravità specifica di diversi liquori. Sicchè ecco due singolarissimi vantaggi quali si ponno da una tal ruota riportare invece del moto perpetuo; chimera che ordinariamente innamora i soli stolti.

Il Sig. Torelli, che onora grandemente Verona sua Patria sempre stata feconda, ed ora molto più d'uomini rarissimi in ogni scienza, e arte, diede prima di me alla luce la sua Macchina Idraulica, simile alla mia inventata prima che egli avesse inventata la sua, benchè non sia stata prima d'ora pubblicata per essere annessa a tutti gli altri Istromenti contenuti in questo volume. Ma se è lecito un confronto, non già suscitato da uno spiriro di odiosa contradizione, ma dalla uniformità delli studj comuni, parmi che questa tre vantaggi principali riporti sopra quella. Il primo è, che essendo la mia vuota nel mezzo, l'aria rinchiusa gli toglie nell'acqua una parte della sua specifica gravità, e quindi diventa al moto più pronta. Il secondo considerabilissimo è, che nel caso del Sig. Torelli, cioè dell'ali rette, va bene che siano segate in due parti eguali, acciò quando siano ripiegate l'una sopra l'altra, l'estremo loro punto C (lettera del Sig. Torelli) trovisi in una massimamente piccola distanza dal centro del moto. Ma per ottenere questa minima distanza,

lo

lo ſpediente era di coſtruire, come io ho fatto, l'ali non già rette, ma con una tal curvatura, che foſſe quella medeſima della circonferenza della ruota; ſeguendo quindi un di più, che l'ali preſentando la loro parte concava alla corrente, men preſto sfuggano alla forza di quella; e per contrario opportunamente, preſentano all'acqua la parte conveſſa, quando bene è che meno che ſia poſſibile reſiſtano a detta forza. In terzo luogo, raddoppiandoſi i Timpani, come appreſſo vedremo, e diminuendo il numero dell'ali di ciaſcheduno, ho avuto comodità di formar l'ali più lunghe, acciò opponeſſero all'azione del fluido. un maggior piano, ed acciò cadendo da un più alto luogo, maggior urto riſentiſſe la ruota, per dover girare d'intorno al ſuo aſſe.

Per altro io credo che (ciò che in alcune macchine avviene, che riportandole dal piccolo in grande, non fanno quel medeſimo effetto che facevano in piccolo) in queſti Timpani, benchè il diametro loro ſi aumentaſſe fino ad uno, o due piedi di Parigi, tuttavia creſcerebbe la loro mobilità; perchè tanto la groſſezza dell'ali, quanto della ſuperficie di eſſi Timpani reſta quaſi la medeſima (ſupponiamo di una linea in circa di detto piede, o di quel del Reno), e creſce ſolo per apportar maggior leggierezza lo ſpazio vuoto nel mezzo in ragion triplicata, come pure creſce in ragion triplicata la maſſa del fluido reſiſtente, che ſi oppone al piano di più grand'ali; e per conſeguenza creſce in detta ragione la forza d'inerzia di eſſo fluido, unica cauſa motrice dei ſopraddetti Timpani. Ma vediamo intanto, come rilevate in un quadrante tutte le converſioni di un tal Timpano attaccato altamente ſott'acqua ad una Nave, ſia poi per manifeſtarſi la quantità del ſuo viaggio.

ARTICOLO SECONDO.

Converſioni dell' Iſtromento Drom-hydro-metra riportate in un Quadrante.

PEr ridurre in un quadrante il numero delle converſioni della predetta Macchina, ſiano (*Fig.* 2.) afferrati ad un medeſimo aſſile EF due Timpani alati A, e B; e ſi concepiſca il primo A mirato di fronte, corriſpondere al Timpano R viſto di fianco della *Fig.* 1., e l'ali ſue aver congiunte nei ſiti corriſpondenti per le linee morte ai numeri impari di detta *Fig.* 1.; e l'altro Timpano B, benchè per maggior chiarezza ſia in diſegno poſto ſenz'ali, ſi concepiſca però averle anch'eſſo conneſſe nei ſiti poſti dirimpetto ai numeri pari; acciocchè tirato dalla Nave verſo O, il telaro di legno che porta l'aſſile di eſſi Timpani, poſſa, caduta un'ala del Timpano A, caderne un'altra del Timpano B; e poi un'altra da quello, ed alternatamente un'altra da queſto ec., come ſe invece di eſſer due Timpani con otto ali per ciaſcuno, foſſe un ſol Timpano con ſedeci ali. Stia poi al medeſimo aſſile EF affiſſo un Rochello C di 10. denti, che in un coi Timpani alati, e coll'aſſile coſtituiſcano un medeſimo ſolido, mobile nel telaro ſecondo l'ordine dei numeri 3, 5, 7, 9, ovvero 2, 4, 6, 8.

Coi denti di detto Rochello C s'ingrana appreſſo una ſerpentina D, ovvero una ruota fatta a caviglie (chiamata dai Franceſi, la prima *roüe de rencontre*, l'altra *roüe de chand*) di 30. denti, il di cui aſſe per di ſotto è ſoſtenuto da un appoggio G, che è parte del Telaro. E per di ſopra per detto telaro trappaſſa, e ſi annoda con una ſorta d'anelli d'acciajo, o d'altra più leggiera materia, che comunicano ſino ad un altro telaro della *Fig.* 3., dove l'ul-

l'ultimo anello D3 porta un Rochello di 10. denti, quale insieme con detti anelli, e serpentina formano un altro corpo ombreggiato a puntini, che fa una sola rivoluzione, mentre l'altro solido tratteggiato composto dell'assile EF, Timpani alati B, A, e Rochello C fa tre rivoluzioni. E quindi avviene che l'anello D3 per ciascuna sua rivoluzione, esprima rivoluzioni dei Timpani numero 3. Perchè come sta il numero dei denti del Rochello C, al numero dei denti della serpentina D; così starà il numero delle rivoluzioni espresso da quello, al numero delle rivoluzioni espresso da questa; cioè 10., 30. :: 1., 3.

Segue indi (*Fig.* 3.) l'assile E, che porta una ruota di 20. denti implicata col Rochello antecedente, e porta pure un Rochello di 10., che ingrana colla seguente ruota di 60.; ed una rivoluzione di questo assile E esprime per l'addotta ragione 6. rivoluzioni dei suddetti Timpani. E così di mano in mano andate dicendo; poichè la *Fig.* 3. dimostra così il numero dei denti delle ruote, e Rochelli, come il numero delle rivoluzioni espresse da tutti gli altri assili F, G, H ec. in una rivoluzione; finchè l'assile L coll'indice superiore giunge ad indicare in una sua rivoluzione 60000. rivoluzioni dei Timpani; e l'assile K esprime in una rivoluzione, rivoluzioni numero 720000. Ma mi piace, che quest'ultima conversione dell'assile K abbia un centro comune con la conversione antecedente, che si fa d'intorno all'assile L; onde (preparate due ruote eguali ciascuna di diametro alla distanza LK) una *d* si fermi nell'assile K, e l'altra *a* (connessa ad una cannetta, che passa di sopra del telaro, e porta un altro indice più corto) sia mobile d'intorno all'assile L; benchè detto assile L si muova del dovuto suo moto per l'impulso delle ruote antecedenti. Perchè quindi avverà, che preparato un *Quadrante* detto da me *Loxodromico*, nel di cui centro occorra l'assile L, e la cannetta della ruota *a*, e che abbia

abbia due ordini di numeri, uno esteriore diviso in 60. parti eguali, e l'altro interiore compartito in 12., l'indice più lungo mostrerà in una conversione 60000. rivoluzioni dei Timpani, e l'altro più corto 720000.

Ora se una conversione dei Timpani fosse eguale ad un passo geometrico percorso dal Bastimento, l'indice più lungo mostrarebbe 60000. passi geometrici, cioè 60. miglia, o sia 60. minuti = Gradi uno; e l'altro più corto mostrarebbe in una rivoluzione 720. miglia = Gradi 12. Ma ciò non essendo così fortunatamente per essere, si dovrà coll' esperimento fatto in una nota distanza, rilevare nel *quadrante* della *Fig.* 3. il numero delle rivoluzioni dei Timpani, corrispondenti ad uno, o più gradi terrestri; e poi distribuire, e ordinare da bella prima le ruote, e numero dei denti in modo, che una perfetta rivoluzione dell' assile K, venga ad esprimere un numero qualunque, ma intiero di gradi terrestri; e l'assile L 60. minuti. Poichè io ho messe le ruote così, perchè serva solo di metodo, onde saper poi contenersi meglio a tenore dello sperimento che si farà; non dubitando che quindi il numero de' gradi, o minuti mostrato dagli indici, non sia per essere proporzionale al viaggio della Nave, unica causa del moto de' Timpani. Dovendosi poi, per quanto a me pare, riputar per niente l'alterazione delle frizioni, che la nuova combinazione delle ruote, e numero dei denti dovrebbe produrre, essendo questa quasi zero rispetto alla potenza de' muoventi principali, che sono i Timpani alati; e molto più perchè si potrebbe far in maniera, che restasse il medesimo numero dei denti presi insieme di tutte le ruote, benchè poi per causare le opportune velocità fosse mutato il numero di quelli di ciascuna in particolare.

ARTI-

ARTICOLO TERZO.

Macchina antecedente adattata al Bastimento.

DUe parti principali si distinguono nella descritta Macchina, che diversamente vanno adattate al Bastimento. Imperciocchè quella che per la sezione della *Fig.* 3. si rappresenta, e che comprende un telaro colle sue ruote, e *Quadrante Loxodromico* tutta insieme deve esser collocata dentro del Bastimento (detta perciò *Parte Interna*), o vicino al Piloto, se fosse possibile, acciocchè mentre governa il Timone abbia sotto gli occhj anche il *quadrante* suddetto, o in qualche altra parte che fosse, se non più comoda, almen più conferente al bisogno della presente costruzione. Quell'altra parte poi significata per la *Fig.* 1., e 2. perchè sta sempre fuori attaccata alla Nave, vien da qui innanzi assolutamente chiamata *Parte Esterna*; ed è quella, che non solo esige somma attenzione nel costruirla, ma molto più nell' adattarla al Bastimento, in modo che e per il *luogo* ove a quello si attacca, e per la *costruzione* sia ben ordinata a qualunque suo muovimento.

Circa il *luogo* ove a quello si attacca, parendo a me che fuori del Bastimento V (*Tav.* 25.) il punto più basso di esso sia quello, che per le agitazioni del Mare muovasi meno che gli altri punti; così in quello vorrei sospendere la *Parte Esterna*, facendo che ivi fosse (o confitto nel Bastimento suddetto V, o connesso comunque a quattro catene fermate a quattro parti opposte) un pezzo di ferro K, in cui fosse orizzontalmente mobile un altro palo di ferro attaccato con un nodo z a detta parte. Alla quale nei nodi M, ed N fosse pur anche annesso un semicerchio di ferro, scorrente (secondo che il Bastimento, o il telaro diversamente inclinasse) per la fessura *d* del palo suddetto;

al

al qual effetto nella costruzione dovranno prendersi le distanze ʒ*d*, ʒM, ʒN eguali. Ma detto pezzo di ferro K sia inoltre prolongato verso la Poppa P con un becco, in cui per qualunque inclinazione della Nave trovi sempre un intoppo il semicerchio M*d*N; acciò detta *Parte Esterna* volgendosi d'intorno al punto dell'attacco ʒ, non possa mai compire un giro perfetto, nè giungere ad urtar contro li anelli. Da questa qualunque situazione delle parti *Interna*, ed *Esterna*, segue che li anelli *a*, *b*, *c* che uniranno l'una all'altra parte avranno ad esser tanti, che giungano dall' uno, all'altro luogo; benchè meno che saranno, e più leggieri che sia possibile, sia meglio.

Circa poi alla *costruzione* della suddetta *Parte Esterna* avverto che per non entrare in una lunga serie di operazioni di prospettiva, o coprire le parti più essenziali, tanto il Piano verticale di essa espresso nella *Fig.* 1., e 2. *Tav.* 24., quanto l'elevazione scenografica della *Tav.* 25. indicata colle medesime lettere, declina alcun poco dalla giusta idea dell'Inventore. Imperocchè dovendo il telaro esser atto a difender l'ali da qualunque urto che possa incontrare, ed a sostenere validamente non solo l'assile D della serpentina D, ma anche un Timoncello H connesso nella parte posteriore ad angoli retti del traverso MN, ed assile EF; deve il cerchio Q stare afferrato ai cardini EM, FN vicino ai punti E, F più che la figura non dimostra. Le porzioni poi EM, FN dovrebbero esser tanto giù profonde nel Mare, che portassero l'assile EF, e li connessi Timpani fin sotto alle radici dell'onde più alte. Notate inoltre, che essendo la gravità specifica del legno minore, di quella dell' acqua marina, e la gravità specifica del metallo maggiore, io vorrei che la *Parte Esterna* composta dell'una, e dell'altra materia venisse, se è possibile, a risultare poco più grave della mole antagonista del fluido, e che il centro di gravità di detta *Parte Esterna* si trovasse nell'infima parte verso GQ.

Non

Non lascio per fin di ricordare, che ai Timpani alati si potrebbero sostituire, 'e far nel medesimo modo muovere sott'acqua ogn'altro Istromento, che fuori d'essa fosse mobile per la sola resistenza, o impeto dell'aria; come quella ruota proposta (1) del P. Milliet, o più sicuramente due di quelle Girandole (supponiamo A, B *Fig.* 5. *Tav.* 26.) di quelle dico, che gli allegri fanciulli sogliono far muovere correndo; ordinandone un pajo in guisa, che con una *chiocciola senza fine* lavorata d'intorno ai loro assi AE, BF facessero volgere orizzontalmente una ruota D, la quale stando in vece della serpentina D della *Figura* 2. *Tav.* 24. si unisce poi col suo asse D*a* alli anelli, che congiungono la *Parte Interna* colla *Esterna*. Avvertendo che acciocchè la ruota D sia dall'una, e dall'altra chiocciola determinata a muoversi da una medesima parte, o le due chiocciole debbono aver le spire, o le due Girandole (come si è fatto in figura), debbono aver l'ali ordinate in verso opposto. Onde se per esempio le Girandole A, B muovansi secondo l'ordine dei numeri posti in figura (supponendo le chiocciole inclinate ad un medesimo verso) la ruota D in un con l'asse D*a*, girerà secondo l'ordine de' numeri suoi posti pure in figura. E perchè per ciascuna rivoluzione delle chiocciole, e Girandole passa un sol dente della ruota D, ogni conversione di essa ruota esprimerà tante rivoluzioni delle Girandole (che starebbero invece dei Timpani alati) quanti sono i proprj denti.

(1) Navig. Lib. V. Prop. 6.

ARTICOLO QUARTO.

Esame delle Obbiezioni che ponno impedire l'effetto della presente Costruzione.

OBBIEZIONE I.

Egli è in primo luogo evidente, che per rilevare la giusta quantità del viaggio percorso, la *Parte esterna* della proposta Macchina deve trovarsi sempre ad angoli retti del solco, che fa in Mare il Bastimento: cioè (*Tav.* 25.) supposto la linea Q*o* essere detto solco, l'assile EF deve esser ad angoli retti di detta linea; benchè col Bastimento o si proceda innanzi di fianco, o colla Prora, o che si prenda comunque una nuova direzione; e benchè la Prora, o la Poppa, o l'uno, o l'altro fianco inclinasse all'orizzonte più da una parte, che dall'altra.

RISPOSTA.

Ma essendo il palicello *zd* ordinato appunto alle variazioni, che sono tutte orizzontali, ed il semicerchio snodato M*d*N ordinato alle seconde che sono verticali, deve naturalmente seguire da se l'effetto proposto. Prima perchè quando il Bastimento acquista una nuova situazione qualunque, la *Parte esterna* incontra tosto nel Timoncello H, e nell'altre sue parti maggior resistenza da un lato, che dall'altro, e quindi si frange l'equilibrio delle resistenze, che non può restituirsi, se detta *Parte esterna* (che per il supposto è poco più grave della mole antagonista del fluido, e sostenuta dal palicello *dz* mobile per ogni verso) non si volge nel pezzo di ferro K, e insieme coll' assile EF non si dispone per una spezie di *trattoria* (poichè non può per salto) ad angoli retti della nuova direzione Q*y*, unico

caso,

caſo, dove le reſiſtenze ſi trovino equilibrate. In quanto poi alle variazioni verticali, la mobilità del ſemicerchio nei nodi laſcia la *Parte eſterna* libera a poter decumbere verticalmente, benchè il pezzo di ferro K in un colla Nave, cui è afferrato, inclini o all'uno, o all'altro di due oppoſti verſi; e la ſua mobilità nella feſſura *d* ſerve per altri due verſi, a quelli, e fra di loro oppoſti; e però ſono in tutti quattro, che a queſt'uopo, ſe non erro, dovrebbero baſtare.

Obbiezione II.

Preſcindendo per ora dalla diverſa inclinazione, con cui una Nave ſi preſenta a ricevere il vento, poſſo ſupporre, che o contro detto vento procede, o a ſeconda. Nel primo caſo pare (quando l'onda andaſſe in conſeguenza del vento) che la quantità del moto dei due Timpani alati, ſia per eſſere maggiore di quella che dovrebbe acquiſtare nell'acqua ſtagnante per il ſolo andare della Nave. Perchè (1) la reſiſtenza, che ſoffre un ſolido muoventeſi in un fluido, è come il quadrato della velocità, onde il corpo ſi muove; e ſe ſi muova il fluido, ed il ſolido ſia quieto, l'urto, che il ſolido ſoffre dal fluido, è come il quadrato della velocità del fluido. Quindi nel primo caſo muovendoſi il ſolido contra del fluido, ed il fluido contra del ſolido, la reſiſtenza che il ſolido nel fluido trova, ſarà come la ſomma de' quadrati delle velocità del ſolido, e del fluido. E però la velocità dei Timpani eccederebbe della dovuta quantità tutto il quadrato della velocità del fluido.

Ma nel ſecondo caſo pare che detti Timpani ſi aveſſero a volgere meno che non dovrebbero. Perchè ſe poi il ſolido muovaſi in un fluido, che pure muovaſi ſecondo la direzione del ſolido, ma con minore velocità; allora il ſolido urta nel fluido, come ſe il fluido foſſe quieto, ed

(1) Graveſande. *Introd. ad Philoſ. Newtonianam* lib. 3. *De Motu Fluid.* cap. 15.

il solido si muovesse con il solo eccesso della sua velocità sopra la velocità del fluido; e quindi nel fluido troverà una resistenza, che sarà come il quadrato della sua velocità sopra quella del fluido.

Maggior ostacolo per fine incontrarebbesi, se la velocità del solido a seconda si supponesse eguale a quella del fluido; perchè i Timpani restarebbero affatto immobili.

RISPOSTA.

Rispondendo pertanto in generale a questa seconda Obbiezione, nel supposto che l'onda che deve alterare il vero movimento della *Parte esterna*, sia sempre per essere a seconda del vento, dico che nè dall'onde, nè dai venti può venir portato alcun turbamento, o disordine ai Timpani alati. Perchè essendo collocata la *Parte esterna* in z (*Fig.* 1. *Tav.* 26.), e i Timpani dovendo riuscire non solo sotto la superficie del Mar tranquillo MT, ma anche sotto le radici dell'onde massime RS, le quali al lido non essendo più alte di piedi 7 (1), (nè men forse in alto Mare, benchè pajan montagne, saranno molto maggiori), e potendosi profondare anche più, giudico certamente che fin là non possa giungere l'azione del vento, unica causa forse delle inquietudini superficiali. Perchè ivi tutte le parti fluide devono (2) trovarsi in equilibrio, non potendo essere il contrasto, e quei reciproci bilanciamenti, che tra le moli acquee, che sono al di sopra della retta RS, come quelle che

(1) Spectacle de la Nature 22.me entretien. La Mer. Mais la même main (de Dieu) qui éléve ses vagues comme des montagnes ver la haute Mer, lui a prescrit des loix, qui la reprime du coté de la terre. Dans les plus grandes agitations, elle respecte les bornes jusqu'ou Dieu lui a permis de s'avancer du coté des nos dameures. Tout l'orgueil de ses flots tombe devant la ligne que Dieu lui a trachée sur le sable, & sept pies de distance font toute la difference du point, ou elle s'eleve dans son êtat ordinaire avec celui, ou sa rage vien mourir sur la côte dans le fort des plus violentes tempêtes.

(2) Gravesande cap. 11. dice: *In quo motu aqua infra nullum* h 1. (cioè sotto la retta RS) *sensibiliter non agitatur*.

che sono uscite fuori dell'equilibrio, nella natura, costante.

Secondariamente supposto, che sulla superficie dell'acqua stagnante, che veramente è piana, e parallela all'orizzonte (*Fig.* 7. *Tav.* 26.), una causa qualunque produca una cavità *a*, tosto d'intorno a quella l'acqua si estolle verso *mm*, e per il proprio peso da *mm* in *pp* ricade, ma poi per l'acquistata velocità nel cadere ha forza di risalire, ed ammucchiarsi in B, e produce in *pp* cavità, che in un colla massa d'acqua sollevata, cioè *p*B*p* chiamasi *onda*. Questo moto propagandosi dunque dalla cavità *a* in fuori per ogni verso, seguita che il moto dell'onda altro non sia che: *motus circuli* (1) *se se expendentis*. Onde se la causa produttrice dell'onda si supponga agire in un sol luogo *a* (e che perciò mi giova chiamare *onda semplice*), può darsi che l'onda vada in conseguenza del vento V situato a sinistra, cioè nella direzione del raggio *a*F di detto cerchio. Perchè supponiamo che un vento da detto V giunga a far impeto nei lati dell'onde K*m*, *am*, le masse del fluido, che naturalmente sarebbero discese per le perpendicolari *mp*, *mp*, dovendo ora in parte obbedire anche ad un'altra forza straniera, che è il vento, andranno a cadere lontano da *p*,*p*, in *e*,*e* forse per una linea curva, la quale sarebbe una Parabola, quando il vento spirasse eguabilmente, e che l'onda discendesse per la perpendicolare *mp*, secondo la legge comune degli altri gravi; e quindi un galeggiante *m* a poco a poco verrebbe dall'onde sospinto verso F. Ma nel mar da tempesta agitato forse operando detta causa in diversi luoghi, e però essendo molti cerchj che l'un l'altro s'incrociano, l'onda che nella incrociatura diventa *composta* di due che si vanno ad incontrare, deve salire, e discendere per una retta verticale all'orizzonte, quando sii eguale la forza delle due *onde semplici*. Imperciocchè supponiamo, che un'*onda semplice* si propaghi dal centro *a* verso F, (pre-

(1) Gravesande cap. 11.

(prescindo per ora dall'impulso de'venti) ed un'altra *semplice* da un altro canto A si dilati in cerchio verso F, con forze eguali (che saranno come la loro velocità (1), che è come la radice quadrata delle loro latitudini *ad*, AD). Le due onde incontrandosi nel punto F vicendevolmente l'una l'altra si aumentaranno, onde unite in una sola onda, che chiamo *composta*, saliranno per una retta verticale al punto F più alto, che come *semplici* non salirebbero negli altri punti; poi perchè tutta quella congiunta massa non può star fuori dell'equilibrio, discenderanno per una medesima verticale a detto punto F, finchè separate l'una dall'altra si faccia cavità nel punto F, e si trovi chiascheduna restituita, e ordinata in cerchio al proprio centro *a*, ed A. Molto più si verifica questo preciso salire, e scendere dell'onda verticalmente, quando sia composta di più *semplici*, che da diversi centri *a* AHG nel punto F venghino ad incrociarsi. E molto più quando fossero determinate ad incontrarsi per lo soffiar gagliardo di diversi venti V, V spiranti da diverse, e molte opposte parti. Il che per mio giudizio succedendo allora più, che si dice essere il Mar tempestoso, ciascun'onda si può tener per *composta*, e perciò il moto di un galeggiante che seconda il moto dell'onde, non altro sarà, che un ascendere, e scendere per una verticale all'orizzonte; onde io concluderei, che allora il moto dell'onde non potesse alterare il vero muovimento dei Timpani, giacchè l'onde in questo caso non vanno in conseguenza del vento.

Confesso per altro che quest'obbiezione avrebbe tutta la sua forza, se fosse applicata alle correnti che s'incontrano nel Mare; e confesso che non avrebbe difesa, se non nel caso che la direzione della corrente fosse ad angoli retti della direzione del Vascello. Perchè allora l'azione del fluido

(1) Ivi dice: *Celeritates undarum sunt ut radices quadratæ Latitudinum.*

do si esercitarebbe nei fianchi dei Timpani, e nelle sottili coste dell'ali, quali restarebbero di fronte tuttavia libere a poter sofferire tutta la resistenza del fluido.

Obbiezione III.

Secondo che la Nave si avvanza con diversa velocità, la *Parte esterna* z (*Fig.* 1. *Tav.* 26.) seco tirata appresso, fa con la perpendicolare zq un angolo ora maggiore, ora minore; e se la velocità fosse data infinita, l'angolo s'eguagliarebbe ad un retto, perche il peso tenta quanto può di mettersi nella direzione della forza traente. Onde seguita che si avesse a temere che nei Timpani alati ora si affrettasse, ora si ritardasse la caduta dell'ali.

Risposta.

Ma si vede che quindi non è per essere alcun considerabile errore, perchè il telaro benchè farà colla perpendicolare zq un angolo ora maggiore, ora minore, non perciò può far volgere l'assile dei Timpani, onde venghino alterati i tempi delle cadute dell'ali.

Obbiezione IV.

Se il moto di un galeggiante sull'onda (intendo *composta*, perchè se fosse *semplice* sarebbe (1) rigorosamente con-

(1) Posto un galeggiante *m* (*Fig.* 7. *Tav.* 26.) sulla superficie dell'acqua stagnante, e fatto impeto su detta superficie in *a*, il galeggiante a sinistra *m*, si porta lontano da *a* verso K. E la ragion parmi che sia, perchè quantunque, niun'aura spirando, l'onda in tal caso non faccia altro che salire, e scendere perpendicolarmente, tuttavia sdrucciolando il galeggiante, come la fantasia ne sforza a credere, sul pendio dell'onda avviene che invece di muoversi anch'esso, come detta onda perpendicolarmente, acquisti piuttosto nella direzione orizzontale un altro sito; il quale sia verso *a* quando il galeggiante sdruccioli sul pendio che riguarda a quella parte; e sarà verso K se sdrucciolarà sul pendio che appunto mira verso K. Ma perchè le onde più che sono lontane dalla sua origine *a* verso K, sono tanto più piccole, così i regressi del galeggiante muoventesi sul pendio che riguarda ver-

tro l'esperienza) non altro sia che un moto di ascendere, e scendere alternatamente per una retta verticale all'orizzonte, certo è che la Nave per il moto solo dell'onda non farebbe altro che alzarsi, e sbassarsi per la retta, per esempio *ab* della figura suddetta, ma perchè viene in oltre spinta immediatamente dal vento, che nel suo corpo urta, per la linea orizzontale *bc*, trovasi ella messa in moto da due potenze espresse per *ba*, *bc* secondo la equabile, o accelerata velocità, e direzione delle quali la Nave deve senza alcun dubbio prendere una via media *bs*, che sarà (qualunque sia la proporzione delle suddette potenze) sempre più lunga della *bc*, ovvero *as*. Ciò che dovendo massime avvenire quando per la furia dei venti il Mare è fatto tumido, e le acque messe in tumulto alternatamente si raccozzano, e si spianano, li Timpani alati quando più in alto tratti anch'essi, e quando più a basso sospinti, compiranno un numero di rivoluzioni maggiore assai più, che non importa lo andar dritto del Bastimento per la retta *a*S, ovvero MT parallela; e però nel *Quadrante Loxodromico* parrà che siasi fatto un molto più lungo viaggio, che veramente non è.

RISPOSTA.

A questa obbiezione rispondo primieramente, che benchè l'altezza *ab* dell'onde massime abbiasi in alto Mare, come già dissi, a stimare anche più di piedi 7., il Bastimento perciò non si alza, e abbassa altrettanto; non potendo per la sua gravità esser sostenuto sulla punta d'un'onda; cosicchè avverrà, che se nel sito R pescava, per esempio, 15. piedi di sotto di RS, molto più pescarà di sotto

verso *a*, sono minori dei progressi che fa sul pendio che riguarda verso K; e quindi a poco a poco da *a* verso K procede. Il Mare dunque benchè tranquillo, butta sempre alla spiaggia i corpi natanti; perchè essendo determinati a scostarsi sempre più dal luogo dove l'onda nasce, bisogna, giacchè il Mare non è infinito, che finalmente pervenghino al lido.

to di *bc*, trovandosi in *b*; e quindi giudicarei che l'altezza, cui si vuole che dall'onda sia trasportato il Bastimento, non sia almen tanto differente da quella in cui trovasi nel tempo della calma, quanto se la rappresentano i Poeti (*aliud est enim Poetarum more verba fundere*, *aliud*, *ea quæ dicas*, *ratione & arte distinguere*); perchè allora senza mentire, l'obbiezione sarebbe di grandissimo peso; onde anche la differenza che passa fra *b*S, ed *a*S non verrebbe forse ad esser tanta, che bastasse a poter alterare sensibilmente la vera quantità del viaggio.

Ma siano l'onde anche tali che tocchino alle nubi, o almeno almeno (ciò che non già nel nostro Mare, ma nell'occeano forse accade) dietro loro coprano tutto il corpo di un Bastimento. In qualunque gran caso; l'onda si potrebbe tenere per un Piano, che quasi per gradi sempre più s'inclinasse, finchè arrivato in *b* tornasse a declinare. Onde la equabile velocità, con cui la Nave da R sarebbe percorsa nella direzione orizzontale verso *a*, prima si diminuirebbe all'incontro del piano R*b*, e poi la rimanente si ritarderebbe salendo in modo, che (posto che l'altezza *ab* dell'onda sia, come a caso avviene in figura, eguale alla metà di R*a*) la Nave su per il piano da R verso *b*, percorrerebbe sol tanto spazio, quanto è la retta *ad*, da *a* condotta normale ad R*b*; mentre (1) colla velocità che ave-

Z va

(1) A questo proposito mi prendo la libertà di onorare i miei scritti con una Dimostrazione del Chiarifs. P. Federico Sanvitali, ed è la seguente:

DIMOSTRAZIONE.

S*upponiamo* (Fig. 2. Tav. 26.) *che partito il corpo* B *da* A *per andare con equabile velocità verso* C, *incontri in* B *il piano inclinato* BV; *e che si desideri sapere, quanto spazio avrà percorso ascendendo da* B *verso* V, *nel medesimo tempo che nella direzione orizzontale avrebbe percorso lo spazio* BC.

va in R prima di urtar nel piano avrebbe percorso tutto lo spazio R*a*.

Questa

BC. *Dico che menata alla retta orizzontale* BC *una perpendicolare* $bE = \frac{1}{2}$ BC*; e da* E *condotta a* BV *una normale* Ed*, questa* Ed *sarebbe eguale a detto spazio.*

Onde primo, si prenda $Eb = \frac{1}{2}$ BC *che sarà l'altezza, per cui* B *ascenderebbe con moto ritardato nel tempo, che con moto equabile percorrerebbe* BC*; cominciando ad ascendere colla velocità che ha per* BC. *Il tempo dell'ascesa per* Eb *è eguale al tempo della discesa per* bE*, in fine della qaale* B *acquistarebbe la velocità, che ha per* BC.

Secondo, si trovi su BC *il punto* E*, da cui possa alzarsi la* $Eb = \frac{1}{2}$ BC*, dicendo nel triangolo* BEb *sta: seno dell'ang.* B. *seno dell'ang.* b :: *Lato* Eb. *Lato* BE *cercato. Ora si tiri da* E *al piano inclinato la perpendicolare* Ed*; sarà* db *lo spazio per cui* B *ascenderebbe, cominciando a salire colla velocità acquistata nella discesa per* bd*, ovvero* bo *nel tempo che ascenderebbe per* EB*, o si muoverebbe equabilmente per* BC.

Terzo, prendendo la velocità $\sqrt{db}$ *acquistata nella discesa per* bd *nel tempo della discesa per* bE*, o del moto uniforme per* BC*, e la velocità* $\sqrt{bB}$ *acquistata nella discesa per* bB*, eguale alla velocità acquistata per* bE*, cioè alla velocità per* BC*, prendendo dico, queste velocità per equabili nel dato tempo per* BC*, avremo* $\sqrt{bd} . 2bd :: \sqrt{bB} . \frac{2bd \times \sqrt{bB}}{\sqrt{bd}}$

E quindi la metà dello spazio trovato $\frac{bd \times \sqrt{bB}}{\sqrt{bd}}$ *sarà lo spa-*

Questa considerabilissima perdita di velocità, secondo il quadrato della quale i Timpani trovano nel fluido quella

Z 2 resi-

spazio percorso dalla data velocità $\sqrt{bB}$ *su pel piano inclinato nel tempo del moto uniforme per* BC.

Ora $\frac{bd \times \sqrt{bB}}{\sqrt{bd}} = \sqrt{bd} \times \sqrt{bB}$ *facendo attualmente la divisione, e perciò lo spazio cercato è media proporzionale tra* bd, *e* bB. *Imperciocchè* bd. $\sqrt{bd} \times \sqrt{bB} :: \sqrt{bd} \times \sqrt{bB}$. bB. *Ma* bE *è media proporzionale tra* bd, *e* bB. *Dunque lo spazio che* B *percorrerà su per lo piano inclinato nel dato tempo cominciando a salire colla data velocità sarà* $= bE = \frac{1}{2}BC$.

Quarto, ora supponendo che la data velocità r *per l'incontro del piano sia diventata* u; *oppure essendo questa a quella, come il seno* BE *del complimento della inclinazione* B *al seno totale* Bb, *e prendendo questa quantità per esprimere la velocità, e supponendo queste equabili averemo* Bb *velocità data.* $2bE = BC :: BE. \frac{BC \times BE}{Bb}$, *di cui la velocità* BE *nello stesso tempo con moto ritardato percorrerà la metà* $= \frac{1}{2} \cdot \frac{BC \times BE}{Bb} = \frac{bE \times BE}{bB}$ *d'onde nasce questa proporzione* bB. bE :: BE. $\frac{bE \times BE}{bB}$. *Ma per la somiglianza de' triangoli* bBE. EBd *abbiamo* bB. bE :: BE. Ed. *Dunque* $\frac{bE \times BE}{bB} = Ed$. *E quindi lo spazio, che* B *nel dato tempo colla velocità proporzionata all'ingresso nel piano inclinato, percorre su lo stesso piano, è eguale alla perpendicolare* Ed *tirata sul piano del punto* E *della base, da cui sorge una perpendicolare* $Eb = \frac{1}{2}BC$ *data*.

resistenza, che gli fa muovere d'intorno al loro asse, non è nè meno compensata da quella che, dappoichè il Bastimento è pervenuto in *b*, acquista indi scendendo giù dall' altra parte. Perchè in fine della discesa per *b*S la velocità in S dovrebbe essere eguale a quella, che dopo l'incontro del piano inclinato aveva in R per ascendere fino in *b* (supposto che per R*b* si fosse distrutta tutta la velocità, che aveva in R). E quando fosse maggiore, perchè tutta non si fosse prima distrutta in *b* salendo, avrebbesi a conchiudere che molto più grande essendo stata la velocità in R avanti l'urto, molto più lungo spazio avrebbe percorso nella direzione orizzontale. Ciò che egualmente torna in favore della mia sentenza. Onde sarei per dire (se non fosse follia stabilire una cosa, ad alterar la quale concorrono tante incerte cause d'onde, e di venti) che l'obbiezione proposta valesse piuttosto in senso contrario, cioè che salendo, e scendendo per R*b*S', nel *Quadrante Loxodromico* fosse per risultare la quantità del viaggio minore, che non sarebbe forse camminando nella direzione orizzontale R*a*S.

OBBIEZIONE. V.

Una sola difficoltà per ogni modo irresolubile, ed egualmente possibile resta d'accusare, cioè quando la Nave avvanzasse con tanta lentezza, che la resistenza del fluido incontrata dai Timpani non bastasse a farli muovere. Tranquilità in vero al mio progetto più fatale d'ogni maggior borasca. Perchè queti i venti niun' altra causa (salvo se alcun ajuto non fosse recato dai remi) può fornire alla Nave la velocità necessaria per far muover la macchina.

Per altro non si può negare, che i suddetti Timpani diverebbero più agili, e capaci a rimaner affetti di moto per una resistenza anche minore, se supposto il mar quieto, fossero stati messi a fior d'acqua in modo, che le circonferenze loro toccassero la superficie del mare, e volgendosi,

dosi, le sole ale giungessero ad immergervisi. Conciossiacchè, oltre che si potrebbe collocare la *Parte interna* più vicino al Piloto, verrebbe diminuita anche la resistenza della massa compresa tra le parallele (*Fig.*1.*Tav.* 14.) *im*, *9n*, quale, d'acqua che era, verrebbe ad esser aria, rimanendo la massa intercetta fra le parallele *9n*, *pd* tuttavia d'acqua. E però essendo la forza d'inerzia (che è come la gravità specifica) dell'acqua a quella dell'aria, come 1000 a 1; e l'acqua marina a quella di fiume prossimamente, come 6 a 5; risulta la specifica inerzia dell'acqua marina a quella dell'aria, come 1200 a 1. Onde per questo capo la resistenza da superare diminuita 1200 volte, i Timpani diventarebbero 1200 volte più atti a ricevere movimento, che non sono, quando stanno immersi affatto nell'acqua marina.

Ma poi nel mar commosso, benchè di buona voglia si recarebbe a gran vantaggio questa maggior mobilità dei Timpani, pure perchè e dall'onde, e dai venti verrebbe loro portato troppo scuotimento, e scompiglio, li ho dalla superficie altamente ritirati sott'acqua; avvisando che ivi, quasi in sicuro asilo si potessero meglio difendere, e ricoverare. Ma ciò che in qualunque modo sia per riuscire, e quali correzioni si dovriano a questa mia Macchina sapranlo quelli, che sono versati nelle cose di marina, e quelli molto più che di detta Macchina facessero prova. Perchè io (indegna cosa ad udire) non ho, che appena veduto dal Lido il Mare, e i Bastimenti nel Porto. E toltone, che per esperienza fatta tanto nell'acque stagnanti, quanto nelle correnti, io so di certo che la *Parte esterna* muovesi sott'acqua con una velocità proporzionale per quanto pare alla forza traente, non ho poi intrapreso alcun altro sperimento necessario a verificar l'effetto totale di questa costruzione.

Supponendola non per tanto conforme al gran Progetto, e che nel *Quadrante Loxodromico* apparisca la quantità del viaggio del Bastimento, applichiamo questo importantissimo

mo dato alla determinazione dei gradi di Latitudine, e Longitudine del luogo, in cui si è.

ARTICOLO QUINTO.

Latitudine, e Longitudine del luogo, in cui si è determinata per mezzo del Quadrante Loxodromico.

NOn è già che io pensi d'introdurre qui tutta quella Teoria, onde data la quantità del viaggio di una Nave si perviene in cognizione della Latitudine, e Longitudine del luogo in cui si è; perchè non mancano Autori, che trattano questa parte, e ai quali mi rimetto, ma solo intendo farne un piccol cenno. Onde supponiamo primieramente, che la Navigazione sia *Circolare*, e che per esempio si sciolga (*Fig.*3. *Tav.* 26.) dal luogo *a* per passare al luogo *d*, e che pervenuti nel sito *b*, si desideri sapere la Longitudine di detto luogo *b*, cioè l'angolo *a*P*b* al Polo P; e la Latitudine, cioè il complimento di P*b* ad un quadrante. Poichè nel triangolo *a*P*b* è noto il lato *a*P, complimento della Latitudine del luogo *a*; e l'angolo *Loxodromico* P*ab*; ed il lato *ab* per mezzo della Macchina suddetta. Colla sola Trigonometria si avrà il lato P*b* complimento della Latitudine ricercata; e l'angolo *a*P*b* differenza della Longitudine.

Se poi la Navigazione è *Loxodromia*, essendo (*Fig.* 4.) la lunghezza della *Loxodromia ab* alla mutata Latitudine *b*G dell' Equatore EGQ, come il seno totale al cosino dell' angolo *Loxodromico* P*ab*; si rileva detta Latitudine *b*G espressa in tante miglia. Quindi poi il lato mecodinamico, perchè è medio proporzioale tra la Latitudine *b*G, e l'aggregato della medesima Latitudine *b*G, più la *Loxodromia ab* data per mezzo della Macchina. E per fine la differenza di Longi-

gitudine EG, o sia l'angolo *aPb* per mezzo delle *Tavole Loxodromiche*.

Quando per fine camminasse il Bastimento da *a* verso E, o per contrario sul medesimo meridiano P*a*E, si rilevarà immediatamente la Latitudine solo col sottrarre, o aggiungere la quantità del viaggio alla già nota Latitudine del luogo d'onde si sciolse, restando la medesima Longitudine. E se procedesse sull'equatore EQ restando la medesima Latitudine, la quantità EG del viaggio sarebbe da sottrarsi, o di aggiungersi alla Longitudine del Luogo d'onde si sciolse, secondo che il Bastimento fosse diretto verso Oriente, o Occidente. Se per fine il viaggio seguisse sopra un parallelo *mdn*, si avrebbe (restando tuttavia la medesima Latitudine) la differenza di Longitudine, convertendo per mezzo delle Tavole in gradi d'Equatore i gradi di detto parallelo espressi dall'Isttomento in tante miglia.

Ma resta d'avvertire, che la Nave (*Fig.6.*) nel suo corso, per esempio da *a* in *b* fa, o può fare delle *deviazioni*, come sarebbero *ac*, *cd*, *de*, *eb*. Nel qual caso stando alle rivoluzioni solamente della Macchina apparirebbe la distanza da *a* in *b* assai maggiore della vera. Al che dovendosi aver giusto riguardo, sarà d'uopo tenere successivamente memoria del proptio viaggio, facendone un informe abbozzo sulla carta. Laonde su detta carta prima di sciogliere dal luogo *a* si tiri da un punto P, supposto essere il Polo, si tiri, dico, la retta P*a*, che si vuol pur supporre essere il complimento della già nota Latitudine del luogo *a*. E però detta retta P*a* sia segnata di detto complimento (che sia per esempio gradi 32). Tirata indi la linea *ac* qualunque, si noti il valore del noto angolo *Loxodromico* P*ac* (sia gradi 80). Partiti poi da *a*, e pervenuti in C, ove cominciando a deviare deve mutarsi l'angolo *Loxodromico* suddetto (uniti prima i punti P, e C con una retta, che sta per il complimento della Latitudine di

un

un altro luogo C) ſi ſegni tanto la quantità del viaggio ſin allora fatto, apparente per mezzo della Macchina (per eſempio miglia 200), quanto il valore del nuovo angolo P*cd* indicato dalla calamita (che ſupporremo gradi 73) e così di mano in mano ſi prendano dalla Macchina le quantità delle ſeguenti diſtanze *cd*, *de*, *eb*; e coll' uſo della Buſſola li altri angoli *d*, ed *e* di ciaſcun' altra deviazione. Pervenuti finalmente nel luogo *b*, di cui ſi voglia ſapere la Latitudine, e Longitudine, ſi potrà colla Geometria dai dati angoli, e note diſtanze, e data Latitudine del Luogo *a* ricavare la lunghezza vera del viaggio *ab*; per quindi ſecondo le regole determinare poi i gradi di detta Latitudine, e Longitudine, o determinar detti gradi a parte a parte come ſe in diverſi tempi foſſero ſtate fatte tante Navigazioni, quanti Rombi, o agoli *Loxodromici* adoperati (che ſono qui quattro P*ac*, P*cd*; P*de*, P*eb*) appariſſero in diſegno.

FINE DEL QUADRANTE LOXODROMICO.

BAR-

BARCA

Che va da ſe contro alla corrente di un Fiume.

ARTICOLO PRIMO.

Sua coſtruzione organica.

PArendomi, che foſſe maraviglioſa, e ſtupenda coſa a vedere una Barca, che da ſe camminaſſe contro alla corrente di un Fiume, ſenza ſcoprirſi a' riguardanti la cagione dello ſtrano (1) effetto, mi è venuto in animo di proporre a queſt' uopo un ingegno, valendomi anche qui dei Timpani alati deſcritti nella Macchina intitolata il *Quadrante Loxodromico*.

Si concepiſca adunque (*Fig.* 1. *Tav.* 27.) una Barca GH che ſia trapaſſata per fianco da un aſſe ritorto F*zonmux*E, che faccia (ciò che è ben da riflettere) un medeſimo ſolido con due Timpani A, B, e per l'impulſo della corrente muovaſi in un con eſſi d'intorno alla linea *mn* nel forame, che trapaſſa dall' uno all' altro fianco della Barca. E ſia pur detto aſſe corredato di quattro forcelle P, C, D, Q mobili d'intorno ad eſſo, e lunghe più che il Fiume non è alto, le quali calando giù al letto di detto Fiume, e poggiando contro eſſo, ſiano diſpoſte, quando che ſia, a contraſtare in verſo oppoſto alla Barca, che naturalmente andrebbe a ſeconda da H verſo G.

Ora egli è evidente nel caſo della *Fig.* che le due for-

 celle

(1) Il P. Milliet fece vedere ſul Tamiggi un ſimil ſpettacolo; ma era viſibile l'artifizio, nè per quel modo poteva riuſcire in un Fiume tortuoſo. *Trattato XVII. della Navigazione* Prop. 10.

celle C, D poggiando appunto ſul fondo debbono ſtar ferme, ed arreſtare anche la Barca, ſicchè non ſcenda a ſeconda della corrente da H verſo G. Ma intanto ſe la velocità del Fiume è tale, che valga a far muovere i Timpani, e in un con eſſi il ſopraddetto aſſe F*zonmux*E, che come ho detto, è un medeſimo ſolido con detti Timpani, il centro del moto dell' aſſe, e dei Timpani, che prima ſi ſuppoſe eſſere la retta *mn*, ora ſarà la linea *zoux* determinata dalle ſuperiori eſtremità *zo* della forcella D, ed *ux* della forcella C.

D' intorno a queſta linea *zoux* volgendoſi l'aſſe ſuddetto, le altre due forcelle Q, P verranno (ſtraſcinate lungo al fondo le loro eſtremità inferiori Q, P) verranno, diſſi, la prima Q traſportata avanti un doppio ſpazio di F*z* nel ſito F*q*, ed altrettanto la forcella P dell' altra parte, benchè in *Fig.* ſi ſia per minor confuſione tralaſciata; onde la Barca dalla prima ſituazione *mn* ſarà anch' eſſa, per cauſa dei ruotanti Timpani, ſoſpinta innanzi contro la direzione del Fiume il doppio di *no*, ovvero *mu*, raggi, per dir così, della rivoluzione che ſi fa d'intorno alla linea *zoux*.

Dopo ciò traſportata, come ſi è detto, la forcella Q nel ſito *fq*, ed altrettanto la forcella P dall' altra parte, amendue dette forcelle Q, P ivi ſtaranno immobili, mentre frattanto ſiano ſtraſcinate innanzi le altre due C, D, che prima ſtavano quiete. E così di nuovo alternatamente ſtaranno ferme queſte, intanto che quelle procederanno più oltre. Onde ſeguita che per ciaſcuna rivoluzione dei Timpani alati, ſarà la Barca dalla prima ſituazione *mn* paſſata innanzi nella direzione contraria alla corrente uno ſpazio quadruplo di *no*, ovvero *mu*, ſupponendo che le curvature F*z*, E*x* ſiano, come debbono appunto eſſere, eguali fra loro, e doppie di *no*, ovvero *mu* parimenti eguali.

ARTI-

ARTICOLO SECONDO.

Risoluzione delle seguenti Obbiezioni.

Obbiezione I.

UNa delle prime Obbiezioni, che può mettere in dubbio questo fatto è, che stando ferme per esempio le due forcelle C, D, non può girar d'intorno alla linea *zoux* l'asse sopraddetto F*zon* ec. se e la Barca, e le altre parti mosse dal ruotante asse non si alzano, oppure non si abbassano tanto, quanto importa *no*, ovvero *mu*, che sono, come si disse, raggi di questa rivoluzione. Ciò che esigge, che la forza motrice proporzionale alla velocità della corrente, debba essere assai grande, o per superare il peso di tutta quella parte di Macchina che galleggia, nel caso che debba alzarsi, o per vincere la resistenza della mole antagonista del fluido, nel caso che si debba abbassare; oltre che detta forza deve anche di tutti li sfregamenti andar vittoriosa, e vincere anche l'azione contraria, che la corrente esercita nel corpo della Barca per farla andare a seconda.

Per dare un maggior giorno a questo obbietto consideriamolo anche nel disegno scenografico della *Fig.* 2. In cui si concepisca l'asse *mn* della *Fig.* 1. rappresentarsi per il punto *n* della 2. che sta nel centro del Timpano alato B; la porzione *no* dell'asse ritorto della *Fig.* 1. essere in questa lo stesso *no*; le forcelle sono le medesime indicate colle medesime lettere, prescindendo di quelle sole parti, che la Prospettiva fa che non possono essere in vista. Dico dunque, che se il punto *n* deve passare a destra di *o* verso H in verso opposto alla corrente, o deve detto punto *n* in un colla Barca, e Timpano alato alzarsi per un arco da *n*

verso B, supposto centro il punto *o* d' appoggio, ovvero deve il punto *o* abbassarsi per un altro arco, supposto il punto fermo D, estremità della forcella D essere centro di detto arco; e quindi incontrare nell' uno, o nell' altro caso l'accennata difficoltà, cioè una troppo grande resistenza da dover superare.

RISPOSTA.

Al che rispondendo, concedo veramente, che la forza motrice debba essere non poca, e che la sola esperienza può in fatti dare a conoscere, se detta forza basterà a superare tutte le opposte resistenze. Pur tuttavia non mancarò di ricordare come si possa almeno aumentare detta forza motrice. E primo quantunque io non lodarei, che il diametro dei Timpani fosse maggiore di due piedi incirca di Parigi, e l'ali dovendo aver rapporto a tale grandezza, non si possano allungare ad arbitrio, per ricevere l'impulso d'un maggior volume d'acqua, si puonno però fare più larghi, perchè quindi riuscendo più larghe anche l'ali possano presentare un più gran piano all'azione della corrente. Secondo, perchè (*Fig.* 1.) la curvatura *no* + *ob* distanza da *o* fino all'estremità dell' ali spiegate si può (essendo i Timpani un medesimo solido col braccio *no* dell' asse F*zon* ec.) si può, dico, considerare come una lieva, dove la potenza sia applicata in *b*, la resistenza in *n*, il punto d'appoggio in *o*; la potenza, o sia la forza motrice (le altre cose pari) sarà alla resistenza *n* in ragione reciproca di *no* ad *ob*; onde più piccolo che sarà il braccio, o curvatura *no* rispetto alla distanza *ob*, tanto maggiore sarà la forza motrice. E' ben vero, che la Barca in tal caso tanto men veloce. Terzo, bisognarebbe, che i Timpani riuscissero immersi a quell' altezza incirca, dove fosse per essere maggiore la velocità della corrente. Quarto, si potrebbe applicare, quinci e quindi, non già due sole forcel-

cel-

celle, ma quattro o cinque, o per lo meno tre; onde essendo più frequenti i punti d'appoggio la Barca venisse continuamente a trovarsi poco men che alla medesima altezza. Quinto, la prora H sia rivolta contro alla corrente, e il forame per dove passa l'asse, sia dal centro di gravità della Barca situato piuttosto verso detta prora, la quale più che sarà scarna e fendente, sarà più confacente ad evitare parte dell'impeto, che il fluido fa nel corpo della suddetta Barca.

Obbiezione II. e sua Risposta.

Giacchè l'assile deve muoversi nel forame, che traversa la Barca, l'acqua che entrarebbe per detto forame farebbe affondare la Barca, se non fossero pronti molti spedienti applicabili ad un tanto inconveniente. Facendo o che l'asse entrasse per una sorta di stucchio, che giungesse dall'uno all'altro fianco; sicchè non lasciasse penetrar acqua di sorte nel ventre della Barca; o che i Timpani girassero d'intorno a detto fermo asse ec.

Obbiezione III. e sua Risposta.

Pare, che solo nel caso che il letto del Fiume sia di minuta, e soda giara, ed eguale abbia luogo questo Meccanismo, non potendosi così di leggiero concepire, come in un fondo fangoso, o per grossi macigni ineguale, possano prender piede le forcelle, ed arrestare la Barca. Ma non sarebbe gran meraviglia, che siccome alcuni fiumi non sono navigabili per il modo comune, alcuni pure non lo fossero per questo modo, che è affatto straordinario.

Obbie-

OBBIEZIONE IV. E SUA RISPOSTA.

Essendo necessario, che quelli che navigano possano, se il Fiume è tortuoso, volgere il loro Naviglio secondo che sia d'uopo, basta da quella parte, dove si vuole che la Barca inclini, alzare le forcelle legate ad una fune (*Fig.* 2.) acciocchè non mordendo più esse il fondo, la Barca o da una, o dall' altra parte si lascj trasportar dalla corrente; ma lasciarle poi ricadere, e pigliar fondo, di nuovo come prima, pare che detta Barca sia indirizzata nella nuova direzione.

FINE DELLA DESCRIZIONE DELLA BARCA.

VI-

VITE D'ARCHIMEDE

Applicata in un modo non conosciuto per anco nè dagli antichi, nè da' moderni Meccanici.

ARTICOLO PRIMO.

AVvegnachè ciascuno sappia qual sia la struttura, e l'uso della *Vite d'Archimede*, non però credo che ad alcuno antico, o moderno Meccanico cadesse mai in animo di ordinarla nel modo che dimostra la *Figura* 3. *Tav.* 27. Codesto mio semplicissimo ritrovato consiste in un cilindro mobile per lo girar di una manetta M su due perni D,B, d'intorno a cui si avvolge una fune, o catena, che qui supplisce per la spira concava della *Vite Archimedea*, e che perciò infila una carrucola R, cui sta poi sospeso ad un uncino un qualunque corpo R. Facendosi pertanto girare detta manetta M, la fune da una parte della carrucola si raccorcia, ravvolgendosi su del cilindro, e dall' altra parte s'allunga, svolgendosi giù da detto cilindro. Quindi la carrucola essendo obbligata a sdrucciolare verso la parte, nella quale la fune s'allunga, porta seco il peso annesso, e l'obbliga a progredire o verso B, o verso D, secondo che la manetta si muove o per una parte, o per l'altra. Ciò che risponde anche in pratica egregiamente.

Ora è chiaro, che quanto la *Vite d'Archimede* è ingegnosa, e opportuna principalmente per far salire l'acqua a mediocri altezze, altrettanto è atta questa mia Macchina a trasportar dei solidi di qualunque figura per una direzione inclinata, o parallela all'orizzonte. Benchè per altro non nego, che la incurvatura che il cilindro corre rischio d'acquistare, quanto più è lunga la distanza BD, ed il corpo pe-

pesante, non sia per produr quel medesimo ostacolo, che patisce anche la *Vite d'Archimede* nelle grandi altezze. Tuttavia non dubitarei di mettere in pratica questa mia *Vite* in moltissimi casi; come sarebbe per transitare dall' una all' altra ripa di un Fiume non molto largo, massime quando (o per la straordinaria sua rapidità, o perchè l' alveo fosse impedito di troppi macigni sporgenti in fuori al di sopra del fondo, o pur anche della superficie dell' acqua, come tra' monti accade) si rendessero impossibili i Porti, che si sogliono fabbricare sulle Barche. Potrebbe detta *Vite* servire ancora per far passare nella Città a traverso del fosso la cassetta delle Lettere (che i Francesi chiamano *la cassette de la Coulisse*) benchè ciò non sarebbe per altro nè più comodo, nè più utile delli spedienti, che già si praticano. Se poi la Macchina fosse disposta in alto, e corredata di argane attaccate come ad un punto fisso in R, una statua, o altro peso qualunque portato prima per mezzo di dette argane ad un' altezza un poco maggiore di quella del suo piedestallo, potrebbe poi, volgendo il cilindro, essere orizzontalmente sospinta anche fin sopra al piedestallo medesimo, per indi esser ivi riposta. Ardirei d'asserire (ma forse che io questa volta deliro) che si potesse applicare detta *Vite* anche a trasportar per molte Leghe delli enormi pesi, come Colonne, Obelischi, ec., facendo di maniera, che i due perni fossero insieme mobili in guisa di carro sopra le sue ruote *m*, *m*. Onde dopo che per lo volger della manetta M il corpo R fosse per esempio portato da B verso D fin che può, si sollevasse alcun poco detto corpo con qualche opportuno ingegno, tanto che si potesse poi farlo poggiare sopra un Letto messo per di sotto, intanto che si cacciasse innanzi verso Q il carro sgravato di tal peso; onde tolto indi via di nuovo il sostegno, e volgendo di nuovo la manetta, si tornasse progredendo innanzi a guadagnare verso Q un altro spazio; così alternatamente facendo ora

star

ſtar fermo il carro, mentre ſi fa muovere il corpo peſante; ed ora fermando un poco alto il corpo, mentre il carro ſi caccia innanzi. Avvertendo che nel medeſimo tempo che il carro avanza, ſi muova ſeguitamente la manetta M in verſo contrario; perchè altrimenti ſarebbe neceſſario, per ogni volta che ſi faceſſe muovere il carro, diſtaccare il grave dalla fune. Ciò che ſarebbe lungo e tedioſo, principalmente quando, nel ſuppoſto di un corpo aſſai peſante, doveſſe eſſer ſoſpeſo con molte più carrucole, che in *Figura* non è. Avvertendo inoltre che il carro dovrebbe eſſere concepito in tutt' altra maniera, benchè per maggior chiarezza ſi ſia qui poſto rozzamente così.

In ſomma a me baſta aver prodotta queſta Macchina nella ſua ſemplicità, e di aver ſolo avventurate alcune conghietture, acciò gli eſperti Ingegneri poſſano da ſe, ſecondo che richiederanno le differenti occaſioni, recarla a quell' uſo, di cui eſſa ſia capace, e che eſſi ſapranſi avviſare meglio di me.

ARTICOLO SECONDO.

Vite ſimile a quella d'Archimede meſſa in pratica con l'aſſe verticale all' orizzonte.

UNa *Vite* non già con le ſpire eguali, e dall' aſſe di rotazione CA egualmente diſtanti, come (*Fig.* 1. *Tav.* 28.) quella d'Archimede, ma con le ſpire (*Fig.* 3.) ſempre maggiori aſcendendo, potrebbe praticarſi, e forſe in alcuni caſi eſſer utile anche con detto aſſe AC non già inclinato, ma verticale all' orizzonte. E perciò ſollevare i corpi in alto in una maniera affatto mirabile.

Il dottiſſimo Sig. Abate Nollet nella ſua *Fiſica Sperimentale* (1) moſtra come per cauſa della Forza centrifuga mol-

Bb ti

(1) Tom. II. Lez. V. Tav. 4.

ti liquori di diversa gravità specifica ascendano (*Fig.* 4.) in un Tubo retto inclinato all' orizzonte, quando il Tubo quasi raggio sia rapidamente mosso intorno ad un asse CA. Ora poichè non può riuscire a tal uopo il Tubo, se non è di una mediocre lunghezza, e quindi i liquori non si possono far salire se non a piccole altezze, immaginiamoci che detto Tubo sia avvolto in spira, come (*Fig.* 3.) f, b, g, B ec. d'intorno a un asse AC verticale all'orizzonte, e ruotante in un col Tubo velocissimamente d' intorno a se stesso; onde avverrà, se mal non erro, che il liquore per causa di detta Forza centrifuga salirà per questo Tubo, quasi per un piano inclinato, da f sino ad X.

Io veramente in vece del Tubo, e del liquore, ho fatto prova (ed èmmene avvenuto benissimo) di un filo d'acciajo (*Fig.* 2. 3.) avvolto in una sola spira f, b, g grosso tanto, che diventi inflessibile alla Forza cui debba resistere (nel mio caso era grosso 2. linee incirca del piede del Reno) e sostenuto almen per ogni quarto di cerchio d'intorno all'asse CA, con vetti simili a quelli, che in figura sono ombreggiati a puntini. Nel piano orizzontale (*Fig.* 2.) la distanza cf era eguale a polici $2\ \frac{1}{2}$; cg = a polici $7\ \frac{1}{2}$; sicchè cf era ad fg, come 1 a 2. Nel piano verticale (*Fig.* 3.) lo spazio fg tra il principio di una spira f, b, g al principio di un'altra prossima gBP era maggiore poco più di 3 polici. Così concepita la Macchina, ed appiccativi successivamente con un uncino (il quale se fosse corredato di una carrucola riescirebbe più agile) due differenti gravi z, uno di legno, che pesava oncie 2, ed un altro di piombo pesante oncie 15. Questi salivano velocemente da f verso b, poi g ec. mentre volgendo la manetta M, l'asse AC ruotava con rapidità in senso opposto, cioè da g verso b, poi f ec.

Per render qualche ragione di ciò bisogna considerare, che il grave z visto di profilo (*Fig.* 3.) mentre era in quie-

te

te decombeva verticale, e coperto sotto il punto d'attacco P; ma poi ruotando la spirale supponiamo secondo l'ordine EDP, acquistò per causa della Forza centrifuga un più alto luogo, tentando disporsi quasi secante detta spirale nella direzione PC posto in diretto col raggio, che parte dal centro di ruotazione. Che ne avviene perciò? Avviene che se detto grave z fosse con l'uncino attaccato alla periferia di un cerchio (*Fig.* 1. *e* 2.) ruotante intorno al suo centro C, secondo l'ordine per esempio P*eab*, starebbe nel punto P d'attacco immobile, perchè dovendosi per causa di detta Forza concepire il grave disposto nella direzione CPZ, direzione che non più da una parte inclina, che dall'altra, il grave non può sdrucciolare nè da una parte verso *e*, nè dall'altra verso *b*; onde seguita che se le spire *fbg*,*g*BP, PEX fossero state eguali, cosicchè nel piano orizzontale (*Fig.* 1.) rappresentassero un circolo, per la addotta ragione il grave non potrebbe salire. Ma se invece di un circolo P*eab* muoventesi orizzontalmente intorno al centro C, fosse piuttosto una spirale ruotante secondo l'ordine XEDP ec. (*Fig.* 2.) il grave z non trovando in P una sicura presa, perchè zP formarebbe allora un angolo misto acuto con PD, sdrucciolarebbe, come in fatti avviene, in senso contrario da P verso D, poi E ec. obbedendo così quanto può a quella Forza, che tenta rimuoverlo sempre più lontano da detto centro; giacchè D è lontano da C più di P; E più di D ec.

Questo discorso vale a dimostrare, che il pezzo z debba scorrere lungo una spirale orizzontale mossa d'intorno al suo centro C, ma non già a convincere che debba salire su per una spirale elevata sopra l'orizzonte, come quella della *Fig.* 3. e rotante intorno al suo asse AC. Onde pare, che perciò il grave z debba per mezzo della Forza centrifuga diventare affetto di un'altra inclinazione particolare, la quale io ammetto volontieri, benchè per non aggiungere nuove figure, e per non parer troppo lungo, tralascio

ſcio di ricordarla. Volendo che ciò ſia quanto piacquemi per ora dire nel propoſito della *Vite d'Archimede*.

Se poi qualcheduno dopo aver trovato vero in effetto, quanto io ſo di certo per eſperienza, quindi ſi luſingaſſe che una ſimil *Vite* foſſe applicabile al moto perpetuo (avviſando che o dell'acqua, o delle palle ſalite così a certa altezza acquiſtaſſeto poi cadendo una tal quantità di moto, che ſe andaſſero ad urtar nelle penne di una ruota ordinata a far muover la *Vite*, la faceſſero di fatto muovere tanto, che riportaſſe o l'acqua, o le palle cadute alla primieta altezza) ſtia certo, che queſta opinione, oltrechè dall' Autore da me lodato è (1) altamente ſchernita, ſarebbe poi anche riprovata dallo ſperimento.

(1) Ceux (dice egli nella Lez. 3. Sez. 3. delle leggi del moto ſemplice Artic. 2.) qui s'en laiſsent impoſer par l'inſpection d'une Machine, ou par une pretendue demonſtration geometrique, ſur la quelle on s'appuye quelque fois pour établir la decouverte de mouvement perpetuel, ſont les dupes de la mauvoiſe foi, ou d'un paralogiſme qui ne tiennent gueres contre de gens inſtruits. Le mouvement perpetuel eſt la pierre philoſophale de la mechanique; ordinairement ceux qui s'y heurtent, ne ſont pas fort initiés dans cette ſcience, de même qu'une recherche obſtinée de la quadrature du cercle, ou du grand oeuvre, n'annoncent a preſent, ni un Geometre ſublime, ni un habile Chymiſte.

FINE DELLA VITE SIMILE A QUELLA D' ARCHIMEDE.

OSSERVAZIONI

SOPRA

ALCUNI POLIGONI RETTILINEI REGOLARI.

PREFAZIONE.

IO *tengo fermissima opinione, che in ogni secolo valentissimi Matematici avranno trattata la materia de'* Poligoni rettilinei regolari, *e saranno in essa iti tant' oltre, che per quanto può la penetrazione degli uomini troppo angusta, e limitata avranno discoperte le loro proprietà e natura; sicchè a quelli, che sono successi dappoi, non altro più rimanga che fare in questa parte. Ma non ostante lusingandomi, che in affare geometrico queste figure non siano forse state per lo addietro costrutte così, come ora da me si fa; e che talvolta si possa se non per arte, almen per caso incontrare in qualche verità non ancora intesa, o avvertita dagli altri; quindi mi parve ben fatto di estendere queste poche* Osservazioni, *le quali abbenchè la maggior parte siano nuove per me, che non sono molto esperto in questa sorta di scienze, non intendo però di sostenere che lo siano per altri; massime ancora perchè, per chiunque siasi, l' asserir cosa nuova sarebbe troppo temeraria impresa; non potendosi ragionevolmente supporre, che un sol uomo sappia quanto siasi scritto per le innanzi, e molto meno quanto oggidì da tanti in tante parti si scriva.*

Era poi a dir vero la mia prima intenzione di cominciare dal Pentagono, *come quello, che è il primo, nel quale dopo zero principia coll' unità la serie delle differenze, che (num.156.) passano tra l' angolo retto, e gli angoli al centro ed alla periferia di qualunque* Poligono; *ed è pure il primo, di cui mentre prodotti i lati s' incrocciano, non può non presentarsi qualche proprietà da osservare. Ma il* Triangolo, *e il* Quadrato *mi trattennero intorno a certe bagatelle, che dopo le seguenti* Definizioni *tosto espongo.*

DEFINIZIONI.

1. CHiamo primo *asse* di un Poligono(*Fig.* 8. *Tav.* 29.) la retta BQ, che coincide col diametro del circolo circoscritto ad esso Poligono.

2. Le *ordinate* sono le rette YZ, GM, PN, RT condotte normali all' *asse* suddetto.

Le GM, PN situate dentro all' area del Poligono si dicono *ordinate interiori*; ed *esteriori* sono le YZ, RT, perchè poste al di fuori di detta area.

3. Le porzioni del suddetto *asse* intercette tra un' *ordinata* e l'altra, e determinate comunque, le chiamo *assisse*, quali sono Qc, c*n*, *nm*, ed anche *n*B &c. Delle due *assisse* appartenenti ad un' *ordinata* P*n*, chiamo Q*n* *assissa maggiore*, ed *n*B *minore*.

4. Io appello *suttensa* una retta condotta da angolo ad angolo per l'area di un Poligono, quando la considero come opposta ad un qualche numero di lati di esso Poligono. Perciò PN sarà una *suttensa* a due lati; NG *suttensa* a 3; GM a 4 &c. anzi qualche volta chiamo il medesimo lato *suttensa* ad un lato, come impropriamente, ma con ragione mi sono espresso al n. 158. nel titolo di quella Proposizione.

5. *Poste in simili siti* chiamo alcune linee, o angoli, o piani, che sono nel medesimo modo ordinate, e disposte intorno al centro della Figura. Avvertendo, che ciò che in qualunque Poligono si asserisce rispetto ad una linea, angolo, o piano, tanto si deve intendere di qualunque altra linea, o angolo, o piano *posto in simili siti* della Figura. Tuttociò per esempio che (*Fig.* 4. *Tav.* 29.) si dirà della retta ZB, s'intende che sia vero dell'altre tutte BE, EH &c. *poste in simili siti*. Ciò che ivi si asserisce per esempio dell' angolo GZA sarà pur vero dell' angolo AEM, MFQ &c.

ARTI-

ARTICOLO PRIMO.

Del Triangolo.

PROPOSIZIONE I.

Alla terza parte di ciascun lato del Triangolo equilatero nop (*Fig.* 1. *Tav.* 29.) *guidati i lati di un Esagono* bqe *&c.*, *e di un altro Triangolo* eGb, *saranno i due Triangoli presi insieme eguali a due Esagoni. Dico* eGb + nop = 2 bqe *&c.*

2. E' dovere, che preceda il valore degli angoli di questo Poligono, non solo perchè serve alla proposta dimostrazione; ma anche per non interrompere l'ordine già prefisso negli altri. E però

$$\text{Ang. } bce = \text{Gr. } 120 = \frac{360}{3}$$

$$beG = \text{Gr. } 60 = \frac{360}{6}.$$

$$\text{Onde } beG = \frac{bce}{2}.$$

Nei quali valori v'è d'osservabile, che l'angolo al centro di un Triangolo è eguale all' angolo alla periferia di un Esagono; e reciprocamente l'angolo al centro di un Esagono è eguale all' angolo alla periferia di un Triangolo. Quindi (costrutta la Figura come abbiamo proposto) nasce, che essendo il Triangolo *bqe* = *bce*, l'area di un Triangolo sta all' area di un Esagono inscritto nel medesimo circolo, come 1 a 2. L'area poi di un esagono sta all' aria di un triangolo circoscritto al medesimo circolo, come 2 a 3; ciò che spicca da se nella Figura, e si deduce anche

che dal primo Teorema pubblicato (1) dal Chiarissimo Francesco Maria Zanotti. Onde essendo l'Esagono *bqe* &c. inscritto nel medesimo circolo rispetto al Triangolo *eGb*, ed essendo anche circoscritto al medesimo circolo rispetto al triangolo *nop*, succede che il Triangolo *eGb*, l'Esagono *bqe* &c. il triangolo *nop* si ritrovano ordinati in progressione aritmetica, come li tre numeri 1. 2. 3; onde siccome $1 + 3 = 2 + 2$; così il Triangolo *eGb* + trian. *nop* = 2 Esagoni *bqe* &c. Come era da dimostrare.

PROPOSIZIONE II.

Il quadrato eretto sul diametro di un Circolo circoscritto ad un Triangolo è al quadrato eretto sul lato di esso Triangolo, come 4 *a* 3. *Dico* $\overline{qG}^2 . \overline{Ge}^2 :: 4 . 3$.

3. Benchè questa Proposizione sia già dimostrata dal P. Tacquet (2), non ostante in grazia delle conseguenze che ne deduco, sia lecito anche a me di dimostrarla così. Poichè dall' estremità del diametro G*q* guidate *qb*, *qe*, che saranno lati di un Esagono, risultano *bc*, *bq* eguali tra di loro, ed alle due *ec*, *eq*, avviene che la *be* taglia in *d* per metà il raggio *cq*; e quindi $Gd = 3dq$; $Gq = 4dq$; $cq = 2dq$.

Onde $\overline{bd}^2 = \overline{bq}^2 - \overline{dq}^2 = \overline{cq}^2 - \overline{dq}^2 = 4\overline{dq}^2 - \overline{dq}^2 = 3\overline{dq}^2$ e però essendo *be* doppia di *bd*, sarà

$\overline{be}^2 = 4\overline{bd}^2 = 12\overline{dq}^2$. Ma $\overline{Gq}^2 = 16\overline{dq}^2$. Sarà dunque

$\overline{Gq}^2 . \overline{be}^2 :: 16\overline{dq}^2 . 12\overline{dq}^2 :: 4 . 3$. Ciò che era &c.

CON-

(1) Lettera del suddetto stampata in Firenze l'anno 1749.
(2) *Elem. Geom.* Lib. IV. Prop. 15. nello Scoglio.

CONSEGUENZA I.

4. Poichè $\overline{Gq}^2 = 16\overline{dq}^2$, $\overline{be}^2 = 12\overline{dq}^2$, ed $\overline{eq}^2 = 4\overline{dq}^2$, li tre quadrati $\overline{Gq}^2$, $\overline{be}^2$, ovvero $\overline{Ge}^2$, $\overline{eq}^2$ saranno come i tre numeri 16, 12, 4, o sia 12, 9, 3.

E perchè $\overline{me}^2 = \frac{1}{4}\overline{Ge}^2 = \frac{1}{4}\overline{be}^2 = 3\overline{dq}^2$. e perciò $\overline{bm}^2 = \overline{be}^2 - \overline{me}^2 = 12\overline{dq}^2 - 3\overline{dq}^2 = 9\overline{dq}^2$; li tre quadrati $\overline{be}^2 = 12\overline{dq}^2$; $\overline{bm}^2 = 9\overline{dq}^2$; $\overline{me}^2 = 3\overline{dq}^2$ saranno essi pure, come i tre numeri 12. 9. 3.

CONSEGUENZA II.

5. Poichè la somma de' quadrati formati sopra ciascun lato dell' Esagono $= 2dq$ è $= 6 \times 4\overline{dq}^2 = 24\overline{dq}^2$; ed i tre quadrati $\overline{be}^2 = 12\overline{dq}^2$; $\overline{bm}^2 = 9\overline{dq}^2$; $\overline{me}^2 = 3\overline{dq}^2$ presi insieme fanno $24\overline{dq}^2$, ne siegue che la somma de' quadrati formati sopra ciascun lato di un Esagono è eguale alla somma di detti tre quadrati $\overline{be}^2$, $\overline{bm}^2$, $\overline{me}^2$.

CONSEGUENZA III.

6. Perchè primieramente la superficie della sfera sta alla superficie curva del cilindro quadrato inscritto nella medesima

ma sfera (1) come 2 a 1, o come 24 a 12 e la ſudetta ſomma de' quadrati $\overline{24dq}^2$ ſta a $\overline{be}^2 = \overline{12dq}^2$ pure come 24 a 12, ne ſiegue che la ſuperficie della sfera ſta alla ſupeıficie curva di detto cilindro, come la ſomma de' quadrati formati ſu i lati di un Eſagono al quadrato del lato *be* del Triangolo regolare inſcritto.

7. Secondo. Che ſe alla ſuperficie curva di eſſo cilindro inſcritto aggiungeremo la ſuperficie delle due baſi, allora la ſuperficie della sfera ſta a tutta la ſuperficie del cilindro (2) come 4 a 3; ma $\overline{be}^2$ a $\overline{bm}^2$ ſta come 4 a 3. Dunque la ſuperficie della sfera ſta a tutta la ſuperficie del cilindro inſcritto, come $\overline{be}^2$ a $\overline{bm}^2$.

8. Terzo. Inoltre $\overline{Gq}^2 = \overline{16dq}^2$ ſta ad $\overline{mb}^2 = \overline{9dq}^2$ come 16 a 9; ma la ſuperficie o ſolidità della Sfera ſta alla ſuperficie o ſolidità di un Cono Equilatero inſcritto nella medeſima (3) come 16. a 9. Dunque la ſuperficie o ſolidità della Sfera ſta alla ſuperficie o ſolidità di un Cono Equilatero inſcritto nella medeſima, come $\overline{Gq}^2$ ad $\overline{mb}^2$.

9. Quarto. Abbiamo ancora $\overline{Gc}^2 = \overline{4dq}^2$, che ſta a $\overline{Gd}^2 = \overline{9dq}^2$, come 4 a 9. Ma la ſuperficie o ſolidità di un Cono Equilatero ſta alla ſuperficie o ſolidità della Sfera (4) inſcritta nel medeſimo Cono, come 4 a 9. Dunque

(1) Tacquet prop. 33. nell' aggiunta al *Trattato della Sfera, e Cilindro d'Archimede.*
(2) Tacquet prop. 34. nel luogo ſopracitato.
(3) Tacquet prop. 39. nel luogo ſopracitato.
(4) Tacquet prop. 40. nel luogo ſopracitato.

que la ſuperficie o ſolidità di detto Cono ſta alla ſuperficie o ſolidità di detta Sfera, come $\overline{Gc}^2$ a $\overline{Gd}^2$.

10. Quinto. Finalmente $\overline{cq}^2$ ſta a $\overline{dq}^2$, come 4 a 1; e la ſuperficie di un Cono equilatero circoſcritto ad una Sfera è alla ſuperficie di un Cono equilatero inſcritto (1) come 4 a 1. Dunque la ſuperficie &c. ſta come $\overline{cq}^2$ a $\overline{dq}^2$. Lo ſteſſo ſi deve dire riſpetto alla proporzione che è tra il Triangolo equilatero circoſcritto, ed inſcritto nel medeſimo Circolo; e riguardo pure ad un Tetraedro circoſcritto, ed inſcritto nella medeſima Sfera.

ARTICOLO SECONDO.

Del Quadrato.

PROPOSIZIONE I.

Tirate dagli angoli a, d *di un quadrato (Fig. 2.) le* aQ, dp *ſuttenſe a tre lati di un ottagono inſcritto nel medeſimo Circolo. Poi dal punto d'interſezione* f *alla periferia condotta la* fe *normale al diametro* bK, *dico* 1. *Che* $\overline{fe}^2$ *è eguale all'eccesso dell'ottogono ſopra il quadrato.* 2. *Che* $\overline{Ke}^2$ *è eguale all'area di detto ottogono.*

11. Eſſendo *a*Q parallela a *bd*, e *dp* parallela ad *ab*, riſulta l'angolo *afd* = ang. *abd*, e li triangoli *afd*, *abd*, che hanno comune la baſe *ad*, parimenti eguali. Guidata

D d poi

(1) Tacquet prop. 41. nel luogo ſopracitato.

poi nm ai punti, dove le rette aQ, dp segano i lati ab, dg, sono eguali anche i triangoli afd, dfm, mfn, nfa, perchè insistono sopra basi eguali af, fm, ed hanno la medesima altezza. Onde tutto il rettangolo $nadm$ eguale a detti quattro triangoli sarà pure eguale ai quattro triangoli bpa, abd &c. che sono tutti insieme la differenza, o l'eccesso dell'ottogono sopra il quadrato $adgb$.

12. Ora poichè (essendo i triangoli sopraddetti afd, abd simili, ed eguali) risulta $bo = of = fc$, e che $bo = uK$, sarà $bo + uK = bf = oc = an$; e sarà $bK - bf = fK = ba = ad$. Perciò il quadrato eretto sopra la media proporzionale tra bf, ed fK, cioè tra an, ed ad, sarà eguale al suddetto rettangolo $nadm$, eguale, dissi, all' eccesso dell' ottogono sopra il quadrato $adgb$. Il che era in primo luogo da dimostrare.

13. Finalmente per essere $\overline{Ke}^2 = \overline{fK}^2 + \overline{fe}^2$, ed essendo $\overline{fK}^2$ eguale al quadrato $adgb$, ed $\overline{fe}^2$ eguale al suddetto eccesso, viene detto $\overline{Ke}^2$ eguale al quadrato $adgb$ più il rettangolo $nadm$ eccesso predetto, e per conseguenza eguale a tutta l' area dell' ottogono $pabd$ &c. Ciò che restava da &c.

PROPOSIZIONE II.

Le diagonali ab, gK; cb, Kf; af, cg *dividono il quadrato* (*Fig.* 3.) agbK *in tre parti eguali; una marcata a puntini, tratteggiata l' altra, e bianca l' ultima.*

14. Si guidi Qn per i punti d'intersezione Q ed m, onde essendo le rette cQ, Kn parallele ed eguali, risultano i

trian-

triangoli cQm, KQm eguali, perchè hanno la medesima altezza, e la medesima base Qm; dai quali perciò se si leva la parte comune Qdm, resta la parte bianca Qcd eguale alla bianca dKm; ma il triangolo QcK è pure eguale al triangolo QnK, dai quali togliendo via parti eguali: cioè Qcd dal triangolo QcK, e dKm dal triangolo QnK, il residuo cdK marcato a puntini risulta eguale al residuo tratteggiato $mKn + mdQ$.

15. Secondariamente perchè Qm, cK sono parallele comprese nel medesimo angolo cfK, e che per esser cf diviso per metà in Q, viene $fQ . fc :: 1 . 2$; perciò abbiamo ancora $Qm . cK :: 1 . 2$. Ora essendo, come dissi, Qm, cK parallele, risultano simili i triangoli Qdm, Kdc; e quindi nasce ancora che $dm . mQ :: dc . cK$; ed inverrendo $mQ . dm :: cK . dc$, ed alternando $mQ . cK :: dm . dc$. Ma $mQ . cK :: 1 . 2$. Dunque $dm . dc :: 1 . 2$. Pertanto i triangoli cdK, dKm, poichè hanno la medesima altezza, saranno fra essi come le basi dm, dc: cioè saranno come $1 . 2$. Onde il triangolo cdK sarà doppio del triangolo dKm. Sarà dunque eguale alli due triangoli bianchi $Qcd + dKm$, che sono stati mostrati eguali. E perchè detto cdK è anche eguale ad $mKn + mdQ$ viene anche $Qcd + dKm = mKn + mdQ$. Dunque finalmente concludo, che cdK; $Qcd + dKm$; $mKn + mdQ$ sono tre piani tra essi eguali, e tutti insieme eguali a $QcKn$ quarta parte del proposto quadrato $agbK$. Quindi moltiplicando per 4 ciascuna di dette parti tre, verrà il quadrato $agbK$ dalle sopraddette diagonali diviso in tre eguali parti. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA I.

16. E' rimarcabile che se fosse per d tirata una retta parallela ed eguale a cQ questa mostrarebbe le altezze dei triangoli mdQ, cdK, le quali sarebbero come $1 . 2$; giacchè

chè $md \,.\, cd :: 1 \,.\, 2$. E perchè i triangoli tra essi sono in ragion composta delle altezze e delle basi; essendo pure le basi $mQ \,.\, cK :: 1 \,.\, 2$; verrebbe il triangolo mdQ al triangolo cdK, come 1 a 4. Ma cdK è $\frac{1}{3}$ del quadrato $QcKn$. Dunque mdQ verrebbe ad essere $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{3}$, cioè $\frac{1}{12}$ parte di detto quadrato $QcKn$.

Conseguenza II.

17. Per la medesima ragione addotta il triangolo mdQ sta al triangolo Qcd, come 1 a 2; al triangolo mKn, come 1 a 3; ed abbiamo osservato che sta al triangolo cdK come 1 a 4. Dunque li triangoli $mdQ \,.\, Qcd \,.\, mKn \,.\, cdK$ sono ordinati in progressione aritmetica, come li quattro numeri 1 . 2 . 3 . 4. Da quali ben si scorge, quali eguaglianze de' piani l'addizione produrrebbe. Che se dalla progressione aritmetica si levi via il terzo termine, cioè il triangolo mKn, che corrisponde al num. 3, in tal caso restano gli altri tre triangoli ordinati in progressione geometrica crescente in ragion dupla, come li tre numeri 1. 2. 4. E quindi risultano altre eguaglianze de' piani per la moltiplicazione.

Annotazione I.

18. Ciò che si è asserito in queste due Conseguenze relativamente alle parti del quadrato $QcKn$ è vero anche rispetto a tutto il quadrato $agbK$, quando si moltiplichino per 4 quelle di dette parti, che entrano in questione.

Annotazione II.

19. Questa Proposizione non è particolarmente vera nel solo Quadrato, ma generalmente si estende a qualunque parallelogrammo, o rettangolo dato.

ARTI-

ARTICOLO TERZO.

Del Pentagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di detto Poligono.

20. Si prolunghino da prima i lati del proposto, o di qualunque altro Poligono (*Fig. 4.*) finchè arrivino a quell' ultimo punto d'interfezione, oltre al quale procedendo anche all' infinito, mai più indi s'incrocciano. Ora essendo la somma di tutti gli angoli AGP, GPQ &c. alla periferia di qualunque figura rettilinea eguale a due volte tanti angoli retti, meno quattro (i quali pareggiano la somma di tutti gli angoli esterni HGP, BPQ &c.) quanti sono i lati della Figura, ed essendo pure gli angoli di un triangolo presi insieme eguali a Gr. 180, perciò quando aggiungendo, e quando sottraendo angoli gli uni dagli altri, quelli di questa Figura vengono a risultare, come siegue:

Ang. GPQ = Gr. 108

$QPB = Gr.\ 72 = \frac{360}{5} = MCQ$ ang. al centro del 5gono.

$QBP = Gr.\ 36 = \frac{360}{10} = MGQ$ ang. al centro del 10gono.

Onde $QBP = \frac{QPB}{2} = \frac{GPQ}{3}$.

Essendo vero pertanto, che sottraendo 36 da 60 angolo al centro di un esagono, il residuo 24 è eguale ad $\frac{1}{3}$ dell' angolo al centro di un 5gono, eguale dico a $\frac{72}{3}$. Perciò se fatto centro in B con qualunque apertura BQ descrivasi

(il

(il che geometricamente si può fare) un arco QY = gr. 60, l'angolo QBY sarà $= \frac{McQ}{3}$, cioè $= \frac{72}{3} = 24$ angolo al centro di un 15gono.

Annotazione.

21. Se mai fosse utile anche la trisezione dell'angolo AGP alla periferia del proposto 5gono, è facile il conseguirla. Imperciocchè tirate le MG, QG, l'angolo per esempio AGM viene ad essere $\frac{1}{3}$ dell'angolo AGP. Perchè sottratto l'angolo MAG da due retti, cioè gr. 108 da gr. 180, la metà 36 del residuo 72 è appunto il valore dell' angolo AGM = AMG = QBP; sicchè dalle due rette MG, QG detto angolo AGP viene diviso in tre eguali parti.

PROPOSIZIONE II.

Il lato di un 5gono sta alla maggior ordinata, come essa maggior ordinata a tutti due. Voglio dire che ∺ PQ. GM. PQ + GM.

22. Opportuna a questo fatto trovasi nella Figura questa proporzione BQ . QP :: BQ + QM . MG; ovvero QP . BQ :: MG . BQ + QM; ma essendo stato provato (n. 21.) l'angolo AGM, ovvero AMG = QBP = AZG, sarà anche il lato GZ, ovvero BQ eguale al lato GM. Il lato poi MQ è eguale a PQ. Sostituendo dunque PQ a QM, ed MG a BQ avremo QP . MG :: MG . MG + QP. Cioè ∺ PQ . GM . PQ + GM, che è lo stesso, ed è ciò che era da dimostrarsi.

CON-

CONSEGUENZA I.

23. Perchè PQ. GM :: GM . PQ + GM, ne ſiegue che ſe ſi prenda una linea PQ + GM compoſta del lato PQ del 5gono, e GM ordinata maggiore, PQ ſarà il ſegmento minore, GM il ſegmento maggiore; e che nel punto dove queſte linee uniſconſi a formarne una ſola, la retta reſta diviſa *media & extrema ratione.*

CONSEGUENZA II.

24. Eſſendo ZE, PQ parallele, ſaranno gli angoli alla medeſima parte QPB, EZG eguali; ma AGZ è per la coſtruzione eguale a QPB; dunque eguale anche ad EZG; e però EZ = EG. Ora EG = GB poſta in ſimile ſito = PQ + GM. Dunque EZ = PQ + GM. Sicchè ∺ PQ. GM. EZ; ovvero anche le ſole metà ∺ nQ. mM. xE.

CONSEGUENZA III.

25. Per la ſimilitudine de' triangoli PGQ, PZF ſuccede, che PG. GQ :: PZ. ZF; ed eſſendo i primi tre termini continui proporzionali, il quarto termine ZF ſarà pure continuo proporzionale a quelli. Onde ∺ PG. GQ. PZ. ZF; ma GQ = BP; ZF = ZB. Dunque facendo la ſoſtituzione riſulta anche ∺ PG. PB. PZ. ZB.

Annotazione.

26. E' ſuperfluo il ricordare, che PQ × EZ = $\overline{GM}^2$; e così che PG × ZB = PB × PZ. Sono coſe che vengono da ſe, e perciò ſaranno tralaſciate anche in progreſſo.

PRO-

PROPOSIZIONE III.

La qual serve d'apparecchio alla seguente.

Dato un primo termine, trovarne un secondo, al quale così stia il primo, come il secondo a tutti due.

27. Si divida (*Fig. 5.*) *media & extrema ratione* la retta GP primo termine dato, su la quale prodotta si segni P*e* eguale al segmento maggiore, ed *e*B posta in dirittura eguale a tutta la data GP. Dico che ⸬ GP.PB.GB.

Però con una medesima apertura PG descrivansi due archi, uno col centro in P, l'altro col centro in *e*; ed al punto d'intersezione Q si guidino le rette PQ, *e*Q, che saranno ambedue eguali alla data GP, e si uniscano i punti Q, B con una retta. La *e*Q = GP sia come GP similmente divisa in *r*, cosicchè *r*Q sia il segmento maggiore; onde condotta P*r*, risultino *r*Q, *r*P, P*e* eguali. Ora per la decima d'Eucl. Lib. 4. li tre triangoli *re*P, *e*PQ, PQB verranno isosceli simili, e co' gli angoli alla base doppj ciascuno degli angoli al vertice; onde siccome per la costruzione ⸬ *er*.*r*Q.Q*e*, così pure saranno le basi di detti tre triangoli ⸬ *re*.*e*P.PQ.

28. Si produca ora QP per la quantità PH = PB, e si congiungono i punti B, H, dai quali siano condotte per G, e Q sino al punto di concorso E le rette BE, HE. Dico primieramente, che li triangoli PQB, QBH, HEB sono simili. Imperocchè l'angolo *e*PQ alla base del triangolo isoscele *e*PQ essendo doppio dell'angolo al vertice *e*PQ, viene = gr. 72, il qual valore sottratto da gr. 180, resta l'angolo BPH = gr. 108. Questo sottratto dal valor totale degli angoli del triangolo BPH, resta ancora per tutti due insieme gli angoli alla base gr. 72; metà de' quali, cioè gr. 36, sono il valore dell'angolo PBH, il qual'aggiunto all'angolo QBP

pure

pure = gr. 36, risulta tutto l'angolo QBH = gr. 72. Nel medesimo modo provasi che è = gr. 72 anche l'angolo BQH, e non altrimenti l'angolo BHG. Onde li tre triangoli PQB, QBH, HEB sono simili.

29. Secondariamente dico, che detti tre simili triangoli sono ordinati nella medesima progressione; perchè siccome il lato *eP* del triangolo *reP* fu base del triangolo *ePQ*, ed il lato PQ di detto triangolo *ePQ* fu base del triangolo PQB; così ora il lato QB del triangolo PQB diventa base del triangolo QBH; il lato BH di detto triangolo QBH diventa base del triangolo HEB; onde per la ragione addotta di sopra (notando specialmente che il triangolo PQB è stato replicato, ed è stato l'ultimo delli tre triangoli *reP*, *ePQ*, PQB, e quì è il primo delli tre PQB, QBH, HEB) verranno le basi ∺ PQ. QB. BH. Ma PQ = GP; QB = PB; BH = GB. Sostituendo dunque questi valori avremo ∺ GP. PB. GB. Ciò che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE IV.

Descrizione geometrica del Pentagono.

30. Pongasi mente, che in qualunque Poligono, di cui il denominatore sia numero dispato, havvi sempre (*Fig.* 4.) un punto M, che perpendicolarmente sovrasta alla metà D di un lato opposto PG; e che continuando due lati fra essi massimamente distanti MQ, GP dalla parte a cui convengono; havvi un punto d'intersezione B, in cui le linee concorrenti MB, GB sono eguali; delle quali due linee, le parti QM, PG sono appunto due lati del proposto Poligono massimamente convergenti verso B, se si paragonino a due altri lati QP, GP convergenti verso P.

31. Ciò posto, volendo descrivere un Pentagono arbitrario, cioè di cui non sia determinato il lato, sia primiera-

mente una data BG divisa *media & extrema ratione* in P; e se non fosse arbitrario, ma che fosse dato e determinato il lato per esempio PG, si cerchi per mezzo della terza Proposizione il secondo termine PB, a cui stia il primo dato PG, come il secondo PB a tutti due GP + PB. Indi da G verso Z si produca la BG per una quantità GZ = PB parte maggiore; poi dalla metà PG parte minore sia eretta una perpendicolare DM. Finalmente col centro in B, e con l'apertura BG descritto un arco GM, dal punto B per M, dove l'arco s'interseca con la perpendicolare, si meni un'altra BE = BZ, e similmente divisa. Imperocchè replicando così la medesima operazione su detta retta BE, si menarà poi da E un'altra EH &c. fino al fine della proposta descrizione.

52. Nel supposto della retta BZ divisa in P, e G, come si disse, si potrebbe operare anche in altra maniera, cioè tirando da B al punto E d'intersezione di due archi descritti uno col centro in Z, l'altro col centro in G, e con una medesima apertura eguale a PZ, tirando, dissi, la retta BE; indi coi centri in Q, e B, e con l'apertura suddetta, menando EH al punto d'intersezione H &c. fino al fine. Perchè risultando così li triangoli EZG, HBQ, ovvero EZB, BHE sempre con gli angoli alla base doppj dell'angolo al vertice, la descrizione si dimostra cavata da quella affezione, che è propria ed essenziale di questo Poligono. Ma o nell'una o nell'altra maniera, che questa descrizione si pratichi, benchè tragga l'origine da quella proprietà che è comune anche alla descrizione d'Euclide, o di Tolomeo, cioè dalla suddetta divisione di una linea *media & extrema ratione*, non però si può dire che sia d'essa. Ella è bensì egualmente geometrica, perchè precisamente conforme a quanto si è dimostrato nelle due Proposizioni antecedenti.

PRO-

PROPOSIZIONE V.

La più piccola ordinata sta alla maggior assissa posta a lati della ordinata maggiore, come l' assissa minore di detta ordinata maggiore, sta all' aggregato di tutte due le ordinate. Cioè voglio dimostrare, che nQ . mr :: Am . mM + nQ.

33. Laonde si rifletta, che dal numero 22. seguita che ∺ *n*Q. *m*M . *m*M + *n*Q. Ma per la ottava d'Eucl. Lib. 6. si ha pure ∺ A*m* . *m*M . *mr*. Dunque *n*Q × *m*M + *n*Q = A*m* × *mr*. E però ricaviamo *n*Q. A*m* :: *mr* . *m*M + *n*Q; ed alternando *n*Q. *mr* :: A*m* . *m*M + *n*Q. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE VI.

Il rettangolo formato su le due assisse spettanti alla minore ordinata sta al rettangolo formato su le due spettanti alla maggiore, come la minore ordinata a tutte due. Voglio dire, che A*nr* . A*mr* :: *n*Q. *n*Q + *m*M.

34. Poichè per la ottava d'Eucl. Lib. 6. ∺ A*n*. *n*Q. *nr*; ed anche che ∺ A*m*. *m*M. *mr*; ed inoltre essendo i quadrati in ragion duplicata de' loro lati sarà $\overline{nQ}^{2}$ ad $\overline{mM}^{2}$ in ragion duplicata di *n*Q ad *m*M. Ma nella seconda Proposizione abbiam visto, che *n*Q sta ad *n*Q + *m*M in ragion duplicata di *n*Q ad *m*M. Dunque $\overline{nQ}^{2}$. $\overline{mM}^{2}$ :: *n*Q. *n*Q + *m*M. Ora perchè $\overline{nQ}^{2}$ = rettang. A*nr*; ed $\overline{mM}^{2}$ = rettang. A*mr*; perciò saranno parimenti li rettangoli A*nr* . A*mr* :: *n*Q. *n*Q + *m*M. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA.

35. L' angolo QrP alla periferia di un 10gono essendo $=$ gr. 144, la metà 72 sarà il valore dell' angolo QrA; ma questo è pur valore dell' angolo McA al centro di un pentagono. Dunque le rette Qr, Mc, perchè egualmente inclinate alla medesima retta rA, saranno parallele. Le rette poi Mm, Qn sono parallele per la costruzione; onde risultano simili i triangoli mMc, nQr. Sicchè $nQ . mM :: rQ . cM$; e perciò $Anr . Amr :: rQ . rQ + cm$. Val' a dire, che il primo rettangolo sta al secondo, come il lato di un 10gono sta all' aggregato di esso lato più il raggio del circolo circoscritto al 10gono e 5gono ora proposto.

PROPOSIZIONE VII.

Il rettangolo di tutto il diametro nella minor assissa appartenente alla maggior ordinata mM *sta al rettangolo fatto su tutte due le assisse laterali a detta ordinata, come il lato del 5gono sta alla somma di* $\frac{1}{4}$ *di esso lato, più* $\frac{1}{2}$ *dell' ordinata medesima. In una parola* $rAm . rmA :: AM \frac{nQ + mM}{2}$.

36. Abbiamo esposto (n. 33.) che $\div\!\!: nQ . mM . nQ + mM$. Ma per l'undecima del Tacquet in Archimede si ha ancora $\div\!\!: nQ \times 2 . mM . \frac{nQ + mM}{2}$. Ora perchè il lato AM essendo doppio dell' ordinata nQ, risulta lo stesso, che se fosse detto nQ moltiplicato per 2; perciò sostituendo AM ad $nQ \times 2$ verrà $\div\!\!: AM . mM . \frac{nQ + mM}{2}$. E perchè li quadrati sono in

ragion

ragion duplicata de' loro lati sarà $\overline{AM}^2 . \overline{mM}^2 :: AM . \frac{nQ + mM}{2}$.

Ma il rettangolo $rAm = \overline{AM}^2$; ed il rettangolo $rmA = \overline{mM}^2$. Dunque $rAm . rmA :: AM . \frac{nQ + mM}{2}$. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE VIII.

Il rettangolo fatto dalle assisse spettanti alla minore ordinata sta al rettangolo fatto di tutto il diametro nella minore assissa spettante alla maggiore ordinata, come 1 a 4. Stanno, dissi, così: $Anr . rAm :: 1 . 4$.

37. Essendo, come tante volte si è detto, i quadrati in ragion duplicata de' loro lati, $\overline{nQ}^2$ sarà ad $\overline{AM}^2$ in ragion duplicata di nQ ad AM; ma nQ ad $AM = PQ$ sta per la costruzione, come 1 a 2. Dunque saranno $\overline{nQ}^2 . \overline{AM}^2 :: 1 . 4$; ma $\overline{nQ}^2 = Anr$; ed $\overline{AM}^2 = rAm$. Dunque $Anr . rAm :: 1 . 4$. Ciò che era &c.

Annotazione.

38. Queste tre ultime Proposizioni sono state appostatamente esposte, perchè contengono certe eguaglianze superficiali, delle quali dobbiamo aver motivo di favellare (n. 146.) in altro luogo.

PRO-

PROPOSIZIONE IX.

Il rettangolo della minor assissa, spettante alla minor ordinata, nell' intiero diametro sta al rettangolo fatto delle due metà di esso diametro (cioè al quadrato del raggio) come la minore ordinata sta all' aggregato della maggiore, e minore. In breve. Arn . Acr :: nQ . nQ + mM.

39. Poichè dal n. 22. abbiamo ∺ PQ . GM . PQ + GM, saranno anche le metà ∺ *n*Q . *m*M . *n*Q + *m*M. Indi dal n. 35 rilevasi *n*Q . *m*M :: *r*Q . cM; e però siccome ∺ *n*Q . *m*M . *n*Q + *m*M; così è ∺ *r*Q . cM . *r*Q + cM; d'onde seguita, che $\overline{rQ}^2 . \overline{cM}^2$ :: *r*Q . *r*Q + cM. Ma $\overline{rQ}^2 = Arn$; $\overline{cM}^2 = Acr$; e giacchè *r*Q . *r*Q + cM :: *n*Q . *n*Q + *m*M. Dunque pure avviene che Ar*n* . Acr :: *n*Q . *n*Q + *m*M. Ciò che era &c.

Conseguenza I.

40. Essendo $\overline{rQ}^2 . \overline{cM}^2$ :: *r*Q . *r*Q + cM. Dunque il quadrato del lato *r*Q di un 10gono sta al quadrato del raggio cM del circolo, in cui è inscritto, come esso lato alla somma del lato, e raggio suddetto.

Conseguenza II.

41. Giacchè (num. 33.) *n*Q . *m*M :: *m*M . *m*M + *n*Q, perciò il seno *n*Q dell' angolo Q*cr* al centro di un 10gono sta al seno *m*M dell' angolo AcM al centro di un 5gono, come detto seno *m*M alla somma di detti due seni, cioè come *m*M ad *m*M + *n*Q.

PRO-

PROPOSIZIONE X.

Due raggi cQ, cG *condotti dal centro* c *a due angoli* Q, G *massimamente distanti di un Poligono, comprendono l'angolo* QcG, *angolo alla periferia di un Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono dato.*

42. Essendo il Poligono dato per esempio un 5gono, sarà dico, QcG l'angolo alla periferia di un 1 ogono. Imperocchè l'angolo McQ al centro del 5gono è doppio dell' angolo del 10gono al medesimo centro; ma l'angolo McQ è doppio dell' angolo MGQ, perchè l'angolo al centro è doppio dell' angolo alla periferia. Dunque facendo centro in G, l'angolo MGQ metà dell' angolo McQ al centro di un 5gono sarà l'angolo di un 10gono al centro G di esso 10gono.

43. Ora quando dall' estremità del lato MQ al centro G di un Poligono si conducono due raggi MG, QG, la somma degli angoli eguali MQG, QMG è eguale all' angolo intiero alla periferia di detto Poligono; onde se di tutto il triangolo MQG, cioè da gr. 180 si sottrae l'angolo al centro MGQ, il residuo è il valore della suddetta somma. Ma gli angoli cGQ, cQG essendo eguali fra essi, e ciascuno eguale alla metà di MGQ, insieme uniti sono eguali all' angolo al centro MGQ. Dunque sottratti questi dal triangolo intiero GQc, cioè da gr. 180, rimane QcG = ang. GMQ + ang. MQG. Eguale, dico, all'angolo alla periferia di un 10gono, il di cui denominatore è doppio del denominat. del Poligono proposto.

Annotazione.

44. La dimostrazione è la stessa, e la proposizione è vera in qualunque Poligono, e perciò avrebbesi dovuto rimetterla ad altro luogo. Ma è stato necessario riporla quì in servigio della seguente

PRO-

PROPOSIZIONE XI.

Primo. Le rette FM, MG, GH *sono tre lati di un 10gono ordinati in un circolo, che ha il centro in* B, *cioè nella periferia di un circolo circoscritto ad un 5gono* Z,H,B *&c. Secondo. Le rette poi* BQ.QG.GH *sono tre lati di un 5gono. Terzo. di un 5gono inscritto entro di un circolo, che passa pel centro* c *del 5gono dato* A,G,P *&c.*, *e di cui il raggio sta al raggio del circolo circoscritto al 10gono suddetto* F,M, G, H, *come* cM *ad* MG.

45. Primo. Le rette FM, MG, GH sono primieramente eguali, perchè (n.22.) GZ, ovvero BQ = MG. Ma FM, GH ciascuna = GZ ovvero BQ, giacchè sono poste in simili siti, dunque FM, MG, GH sono eguali. Secondo, gli angoli da esse rette compresi valgono gr. 144 angolo alla periferia di un 10gono; perchè essendo il triangolo FMQ simile al triangolo BMG, l'angolo FMQ = QPB è eguale all'angolo BMG, e ciascuno (num. 20) = gr. 72; gli angoli dunque FMQ + BMG = gr. 144. In terzo luogo i raggi HB, GB, MB, FB sono pure eguali; perchè (n. 24) EZ = EG (= BG = BM); ed EZ = BH = BF poste in simile sito. De' quali raggi poi perchè il punto di concorso B cade nella periferia di un circolo circoscritto al Poligono Z, H, B &c. perciò il loro centro trovasi nella suddetta periferia. Dunque le rette FM, MG, GH sono tre lati &c. Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

46. Secondo. Le rette poi BQ, QG, GH sono primieramente eguali, per la ragion medesima addotta di sopra. Secondariamente gli angoli da esse formati valgono gr. 108 angolo alla periferia di un 5gono; imperocchè l'angolo BQP = QPB è (n. 20) = gr. 72. L'angolo PQG = gr. 36; tutto l'angolo dunque BQG, che comprende detti angoli BQP, PQG sarà = 72 + 36 = 108. Le rette dunque BQ, QG, GH so-

no

no tre lati di un 5gono. Ciò che era l'altra parte.

47. Terzo. Giacchè abbiamo trovato che QcG (n. 42) è l'angolo alla periferia di un 10gono, quel circolo, che circoscrive il 5gono, di cui è un lato QG, deve circoscrivere anche il 10gono, di cui sono due lati Qc, cG. Onde passando per gli angoli di esso 10gono, passa anche per un angolo c, che è centro del 5gono A, G, P &c.

48. Da ciò poi che si è detto (n. 42) nel principio della medesima antecedente Proposizione seguita, che i raggi di due circoli circoscritti a due Poligoni di un medesimo lato, e l'uno di denominatore doppio del denominatore dell' altro, siano, come cM ad MG. Imperocchè essendo McQ angolo al centro di un 5gono, risulta cM raggio di un circolo circoscritto a detto 5gono, di cui è lato MQ. E perchè MGQ è poi l'angolo al centro di un 10gono, la retta MG viene ad esser raggio di un circolo circoscritto a detto 10gono, e di cui è lato il medesimo lato MQ. Ora non altrimenti questi due altri Poligoni BQ, QG, GH &c. ed FM, MG, GH &c. sono eretti su i lati eguali, e sono l'uno di denominatore doppio del denominatore dell' altro, dunque i raggi de' circoli ad essi circoscritti saranno parimenti come cM ad MG. Ciò che in ultimo luogo restava &c.

Annotazione.

49. Questa Proposizione ha luogo in tutti i Poligoni di denominatore disparo, e se non fosse, che si cangiano certe circostanze che hanno bisogno di nuova prova, sarebbe soverchio il ripeterla, e molto più soverchio, perchè circa all' essenziale se ne darà altrove (n. 150) una dimostrazione generale.

ARTICOLO QUARTO.

Dell' Esagono.

PROPOSIZIONE.

Un Esagono inscritto entro un circolo sta all' Esagono circoscritto il medesimo circolo, come 3 a 4.

50. Dalla costruzione della Figura 6. ben si vede, che dhc è $\frac{1}{6}$ parte dell' Esagono inscritto dhn, &c.; e che il trapezio $dmhc$ è $\frac{1}{6}$ parte dell' Esag. circoscritto fmg &c. e rileviamo ancora, che il triangolo dmh è la loro differenza; sicchè devesi provare, che dhc stia a $dmhc$, come 3 a 4.

Perciò essendo dh, fg parallele, avviene che $md . mf :: mq . me$; ma $md . mf :: 1 . 2$ per la costruzione; dunque $mq . me :: 1 . 2$. Dunque $mq = qe$. Ora già (n. 2) si disse, che l'angolo dmh alla periferia di un Esagono è eguale all'angolo deh al centro di un triangolo equilatero dhc; onde i triangoli dmh, deh saranno eguali, perchè hanno la base dh comune, ed opposta ad un medesimo angolo. Ma il triangolo dhc è eguale a tre triangoli deh, e perciò eguale a tre triangoli dmh. Il trapezio poi $dmhc$ quindi risulta eguale a $3 + 1 = 4dmh$. Dunque il triangolo dhc sta al trapezio $dmhc$, cioè la sesta parte dell' Esagono inscritto sta alla sesta parte dell' Esagono circoscritto, come 3 a 4. E perchè in tutti stanno come le loro parti simili; dunque anche un Esagono inscritto &c. Ciò che era da dimostrare.

CONSEGUENZA I.

51. Quindi poichè $dhc = 3dmh$, farà tutta l'area dell' Esagono inscritto, cioè $6dhc = 18dmh$. Così essendo $dmhc = 4dmh$, sarà tutta l'area dell' Esagono circoscritto, cioè $6dmhc = 24dmh$. Possiamo inoltre considerare, che il triangolo fmg è eguale a 4 triangoli dmh; ed il triangolo fgP è eguale a 3 triangoli fmg. Dunque il triangolo fgP è eguale a 12 triangoli dmh; e per una simil ragione è il triang. $cdh = dnh$, ed il triang. $dan = 3$ triang. dnh. Dunque il triangolo $dan = 3$ triangoli cdh; ma il ttiangolo cdh è $= 3$ triangoli dmh. Dunque il triangolo $dan = 9dmh$. Sicchè il triangolo dan sta all' Esagono dhn &c. come il triangolo fgP all' Esagono fmg &c. cioè stanno in questa proporzione geomet. $9 . 18 :: 12 . 24$.

CONSEGUENZA II.

52. Li due triangoli presi insieme sono ai due esagoni presi insieme nella medesima ragione, che un triangolo sta all' esagono inscritto nel medesimo circolo, cioè come 1 a 2. In fatti $\overline{9 + 12} = 21 . \overline{18 + 24} = 42 :: 1 . 2$. Perchè poi tanto l' esagono, quanto il triangolo inscritto sta all' esagono ed al triangolo circoscritto, come 3 a 4. Starà anche l'esagono più il triangolo inscritto, all' esagono più il triangolo circoscritto, come 3 a 4; onde

$\overline{9 + 18} = 27 . \overline{12 + 24} = 36 :: 3 . 4$.

ARTICOLO QUINTO.

Dell' Ettagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di detto Poligono.

53. Prolungati i lati dell' Ettagono (*Fig.* 7.) come si fece quelli del 5gono, il valore degli angoli di questa Figura risulta.

Ang. $qpo =$ Gr. $128\frac{4}{7}$

$opD =$ Gr. $51\frac{3}{7} = \frac{360}{7}$

$oDp =$ Gr. $77\frac{1}{7}$

$oDE =$ Gr. $102\frac{6}{7}$

$DEZ =$ Gr. $25\frac{5}{7}$

Onde $DEZ = \frac{opD}{2} = \frac{oDp}{3} = \frac{oDE}{4} = \frac{qpo}{5}$

E però volendo tripartire l'angolo al centro dell' Ettagono si osservi, che l' angolo $oDp =$ gr. $77\frac{1}{7}$. Col centro dunque in D, e con qualunque apertura Dp fatto un arco di gr. 60 (che geometricamente può farsi) e questo levato dall' angolo oDp, cioè da gr. $77\frac{1}{7}$, restano gr. $17\frac{1}{7} = \frac{51\frac{3}{7}}{3}$, che viene ad essere l'angolo al centro di un 21gono.

Auno-

Annotazione.

54. Se per avventura fosse mestieri di dividere in tre parti eguali l'angolo alla periferia di questo Poligono, si noti che l'angolo DEZ è $= 25\frac{5}{7}$, e la sua metà eEZ $= 12\frac{6}{7}$, a cui se si aggiunge un angolo di gr. 30, che è pure geometricamente possibile, sarà $30 + 12\frac{6}{7} = 42\frac{6}{7}$ valore ricercato nella proposta trisezione.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore ZD (*che unisce i punti di concorso dei due lati* bh, po; *e delli due* qp, ho *prodotti*) *e due interiori* hp . bq *sono cont. geom. propor. Dico* ∺ ZD . hp . bq.

55. Esaminata la disposizione della figura troviamo, che

Eb . bp :: E h . hD ovvero Eb . E h :: bp . hD
Qb . bp :: QT . To ovvero Qb . QT :: bp . To.

Ma To = hD posta in simile sito.

E però $\left.\begin{matrix}Eb.\ Eh\\ Qb.\ QT\end{matrix}\right\}$ :: bp . hD. Dunque (giacchè passa una medesima ragione, tra quelle quantità, che hanno con un' altra un medesimo rapporto) saranno Eb . Eh :: Qb . QT; ma Qb = Eh; QT = EZ, perchè poste in simili siti. Dunque Eb . Eh :: Eh . EZ. E però ∺ Eb . Eh . EZ. Ovvero giovandomi piuttosto di disponere i termini. Così ∺ EZ . Eh . Eb. Dunque saranno anche ∺ ZD . hp . bq, perchè sono paralle-le, e comprese nel medesimo angolo KEH. Ciò che era da dimostrarsi.

CON-

CONSEGUENZA I.

56. Le rette Dh, *pb*, *q*Y condotta per *d* saranno pure tre contin. geom. propor. perchè e sono fra esse parallele, e comprese nel medesimo angolo KEH, e cominciano dai punti D, *p*, *q* estremi delle suddette cont. geom. propor. ZD, h*p*, *bq*.

CONSEGUENZA II.

57. Si potrebbero conseguire infinite altre proporzionali continue alle suddette guidando delle altre rette intercette nel medesimo angolo KEH, e alternatamente parallele quando alla *bp*, e quando alla *bq*.

PROPOSIZIONE III.

Tirata bx *parallela ad* ho, *sino all' incontro della retta* GE, *le rette* oZ, oh (*ovvero* xh), xb *saranno contin. geom. propor.*, *dico* ∺ oZ.oh (= xh).xb.

58. Per preambolo a questa Proposizione bisogna prima crederne un' altra, qual' è, che dati tre termini continui proporzionali, per esempio, EZ, Eh, E*b*, il primo sta al secondo (ovvero il secondo al terzo), come la prima differenza tra il primo e secondo, sta alla seconda differenza tra il secondo e il terzo. Sta, dissi, EZ . Eh (ovvero Eh . E*b*) :: Zh . h*b*. Il che parmi non solo per se stessa cosa vera, ma risulta anche dalla Figura; perchè essendo li triangoli h*op*, ZoD simili abbiamo ZD . h*p* :: *o*Z . *o*h; dunque perchè poi EZ . Eh :: ZD . h*p*. Seguita pure che EZ . Eh :: *o*Z . *o*h; ma *o*Z = Zh posta in simile sito; e per la medesima ragione *o*h = h*b*. Dunque EZ . Eh (ovvero Eh . E*b*) :: Zh . h*b*.

59. Sic-

59. Siccome però ZD.h*p* :: *o*Z.*o*h ; così pure h*p*.*bq* :: xh (parallela ad *o*Z) . x*b* (parallela ad *o*h). E perchè poi ZD.h*p* :: h*p*.*bq*, saranno altresì *o*Z.*o*h :: xh.x*b*; onde essendo *o*h, xh per la costruzione eguali, perchè parallele alle *px*, *po* rispettivamente, saranno ∺ *o*Z.*o*h (ovvero xh).x*b*. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA I.

60. Per la similitudine de' triangoli *e*Z*o*, *o*h*m* (ovvero *m*hx), x*bn*, de' quali i lati omologhi *o*Z, *o*h (ovvero xh), x*b*, ed anche *e*Z, *m*h, *nb* si ritrovano contin. geom. proporzionali, risultano tali anche le assisse, o sia le basi ∺ *eo*.*om* (ovvero *m*x) . x*n*.

CONSEGUENZA II.

61. Dati tre termini continui proporzionali per esempio
2 6 18
∺ 1. 3. 9. se si trova una quantità 18, che sia terza proporzionale alle due differenze 2, 6 di detti termini, l'aggregato di questa quantità 18 col terzo termine 9 sarà un quarto termine proporzionale alli tre dati 1.3.9; perchè le differenze di una serie qualunque di termini contin. proporzionali sono pure continue proporzionali; e però siccome determinate le due prime differenze sappiamo qual debba risultare la terza, così determinati i primi tre termini conseguiamo il quarto, coll' aggiungere la terza differenza al terzo termine. Quindi nella Figura essendo delli tre termini ∺ EZ.Eh.E*b* le differenze Zh, h*b*, ovvero Z*o*, *o*h; ed essendo pure per questa Proposizione ∺ Z*o*.*o*h.x*b*; perciò sarà ∺ EZ.Eh.E*b*.E*b* + x*b*. Ma la retta condotta da *q* per *d* in Y essendo terza proporzionale delle due hD, *bp*, fissa pure nella retta HE una terza proporzionale EY alle due ante-

antecedenti Eh, E*b*; onde ∺ EZ. Eh. E*b*. EY; e quindi determina nel medesimo tempo la *b*Y eguale ad *xb*.

CONSEGUENZA III.

62. Perchè poi hD, h*p* sono eguali, perchè opposte ad angoli eguali del triangolo isoscele Dh*p*, perciò Zh + h*b*, cioè Z*b*, che per esser in simile sito è eguale ad hD, sarà anche eguale ad h*p*; come non altrimenti sarà h*b* + *b*Y = *bq*, cioè che di due ordinate condotte nell' area di un 7gono da angolo ad angolo, la minore è eguale all' aggregato della prima più la seconda differenza. La maggiore è eguale all' aggregato della seconda più la terza differenza delle quattro proporzionali suddette.

PROPOSIZIONE IV.

Delle tre proporzionali EZ, Eh, Eb, *la prima differenza sta alla seconda, come tutte due le differenze alla maggior ordinata. Stanno* Zh . hb :: Zb . bq.

63. Essendo le h*o*, *bp* parall. sarà zh . ho = h*b* :: Z*b* . *bp* = *bq*.

Annotazione.

64. E perchè h*b* + *b*Y (num. 62) = *bq* seguita che la prima differenza sta alla seconda, come la somma della prima e seconda sta alla somma della seconda e terza, la qual somma è h*b* + *b*Y.

PRO-

PROPOSIZIONE V.

Le tre proporzionali EZ, Eh, Eb *sono tali, che il primo termine è a tutte due le differenze, come tutte due dette differenze alla seconda differenza. Dico che* $\div\!\!:$ EZ. Zb. hb. *Secondo. Il primo termine è a tutte due le differenze, come la somma del secondo e terzo termine a detto terzo termine. Cioè* EZ. Zb :: $\overline{Eb + Eh}$ (= EH). Eb.

65. Per disporsi a ricevere la presente Proposizione, bisogna prima provare, che una retta menata da T ad M sia eguale a TQ. Il che è certissimo; perchè sottratto l'angolo ToM (= gr. 128 $\frac{4}{7}$) da gr. 180, valore totale degli angoli del triangolo ToM, restano gr. 51 $\frac{3}{7}$, metà de' quali, cioè gr. 25 $\frac{5}{7}$ è il valore dell' angolo TMo. Ma questo per la prima Proposizione è pur valore dell'angolo TQo, ovvero DEZ, che è lo stesso; dunque i lati MT, TQ del triangolo MTQ, perchè opposti ad angoli eguali, saranno parimenti eguali.

66. Ciò premesso ecco una nuova analogia oh. h*p* :: *o*T. TM; ma oh = h*b*; ed h*p* (n. 62) = Z*b* = *o*T, perchè poste in simili siti; come anche TM = EZ. Dunque sostituendo questi valori a quelli, risulta $\div\!\!:$ h*b*. Z*b*. EZ; ovvero $\div\!\!:$ EZ. Z*b*. h*b*. Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

Inoltre *o*T. TM :: *o*F. FV; e perchè *o*T = *b*Z; TM = ZE; E*b* = *o*F; FV = EH, avviene che *b*Z. ZE :: E*b*. EH. Ovvero EZ. Z*b* :: EH. E*b*. E per essere EH = E*b* + Eh risulta per fine EZ. Z*b* :: E*b* + Eh. E*b*. Ciò che era l'altra parte.

Annotazione.

67. Ben si scorge, che quando fosse possibile la precisa divisione geometrica di una data retta EH in b, ed h, come esige la figura, sarebbe risolto il problema della descrizione geometrica dell' 7gono; giacchè avressimo poi due differenti maniere di stabilire la giusta posizione della retta KE rispetto ad EH, per formare un triangolo isoscele qEb, ovvero KEH, del quale gli angoli alla base fossero ciascuno tripli dell' angolo al vertice, in che consiste appunto tutta la difficoltà di questa descrizione. Imperocchè data che fosse la EH divisa in b ed h, come si è detto, e (relativamente alle due differenti maniere, che si tennero (n. 31, 32) per la descrizione del 5gono) fosse dalla metà di bh tirata verso q una perpendicolare indeterminata; la retta poi condotta da E per il punto q, dove la perpendicolare s'intersecasse con un arco fatto col centro in E, ed apertura Eb, definirebbe il triangolo bEq, che sarebbe il proposto. O pure data la medesima retta EH divisa, come si disse, in b ed h, basterebbe (per essere bH = HK, ed Eb = bK) tirare una retta da E al punto K d'intersezione di due archi: uno col centro in H, ed apertura Hb; l'altro col centro in b, ed apertura bE; perchè KEH sarebbe pur anche il proposto triangolo. Dunque se si potessero trovare geometricamente tre termini proporzionali tali ∺ EZ. Eh. Eb, che parimenti risultasse ∺ EZ. Zb. hb; ed anche EZ. Zb :: $\overline{Eb + Eh}$ (= EH). Eb. E che perciò il problema ristretto da queste condizioni diventasse determinato, cioè che li tre termini proporzionali non potessero accadere in niun' altra ragione differente di quella che concerne alla figura, sarebbe data la divisione della retta EH in b ed h, come si richiede, e la descrizione dell' Ettagono risolta.

Ma

Ma questo è un affare, che non dobbiamo forse aspettarsi, che sia così presto spedito, e che lusinga tuttavia alcuni, perchè non è ancora stato dimostrato impossibile. Ragione per vero dire, che prova abbastanza quanto a torto si biasimino anche quelli, che procurano la quadratura del circolo, o la trisezione dell' angolo, pur che lo facciano in modo, che non perdano troppo di vista le altre più accessibili speculazioni. In fatti avrebbesi mai in Geometria fatta la scoperta di due Teoremi così importanti, come quelli che in un tratto di penna ha dimostrato il Chiarissimo Francesco Zanotti (1) circa alle figure circoscritte al Circolo, ed alla Sfera, se sgomentato dalle difficoltà, onde parevano circonvallati, non ci avesse pensato? Da Archimede sino a noi un sol Geometra entrato in questo campo aveva messo la falce ad una spica, ma era al Zanotti riservato di mieterlo. Così sogliono andare le cose, e le belle si ritrovano di raro, non perchè siano rare, ma perchè per lo più si cercano per le vie difficili, quando di raro furono trovate belle, che non fossero anche facili. Un celebre Francese (2) egualmente dotto e faceto non dubita, che non s'abbiano un dì a veder gli uomini a volare per l'aria, come gli uccelli. Ciò che io siccome non ardirei di affermarlo, così non sarei tanto avverso a questo fatto, che condannassi colui, che tentasse di rendere alla società un così importante servigio; massime quando con felicissimo successo furono già visti come Cigni (3) a nuotare ne' siti più difficili del Danubio. Ma torniamo a proposito.

(1) Lettera stampata in Firenze l'anno 1729.

(2) M.r de Fontanelle. *Entr. sur la pluralité des Mondes. Second. soire. On commence deja a voler un peu; plusieurs personnes differentes ont trouvé le secret de s'ajuster des ailes, qui les soutiennent en l'air, de leur donner du mouvement, & de passer par dessus des rivieres, ou de voler d'un clocher a un autre. A la verité ce n'a pas été un vol d'aigle, & il en a quelque fois coûté a ces nouveaux oysseaux un bras, ou une jambe; mais enfin cela ne represente encore, que les primieres planches, que l'on a mises sur l'eau, & qui ont été le commencement de la navigation.... L'art de voler ne fait encore, que de naître, il se perfectionnera, & quelque jour on ira jusque a la Lune.*

(3) Atti di Lipsia 1691. pag. 37.

PROPOSIZIONE VI.

Il rettangolo del lato del 7gono nella suttensa a due lati è eguale al rettang. della suttensa a tre moltiplicata in Zh, *ovvero* bS *differenza del primo termine* EZ *al secondo* Eh. *Diciam breve* bhp = Sbq.

68. Abbiamo già (n. 63) dimostrato, che Zh.h*b*::Z*b*.*bq*. Ma Zh = S*b*; Z*b* = h*p*; onde S*b*.h*b* :: h*p*.*bq*. Dunque *b*h*p* = S*bq*. Ciò che &c.

CONSEGUENZA.

69. Dunque anche le sole metà *b*h*m* = S*bn*. Ora essendo G*d*.*dt* :: G*b*.*bn*, segue che *dt* × G*b* = G*d* × *bn*; ma *dt* × G*b* = *b*h*m*, perchè siccome nel rettangolo *b*h*m* tutto il lato *b*h è stato moltiplicato per la metà di h*p*; così per contrario nel rettangolo *dt* × G*b* è moltiplicato tutto h*p* = hD = G*b* per la metà del lato *b*h = *dt*. Una simil cosa dite del rettangolo G*d* × *bn* rispetto al rettangolo S*bn*. Sono dunque *dt* × G*b*, ovvero G*d* × *bn* = *b*h*m*, ovvero S*bn*. Dunque tutto il rettangolo *b*h*p*, ovvero S*bq* a quello eguale sta al rettangolo *dt* × G*b*, ovvero G*d* × *bn* ad esso eguale, come 2 a 1.

PROPOSIZIONE VII.

Il rettang. delle assisse spettanti alla minima ordinata td *sta al rettang. della terza differenza nella prima differenza delle quattro proporzionali* EZ, Eh, Eb, EY, *come* 1 *a* 4. *Dirò più chiaro così*: rto.YbS :: 1.4.

70. Essendo ∺ Y*b*.*b*h.hZ; come pure ∺ *to*.*o*h (= *b*h).*om*. saran-

saranno $ro . Yb :: hZ . om$; e però il rettangolo $rom = YbS$, perchè $bS = hZ$. Ma il rettang. rto sta al rettang. rom, come $\overline{td}^2$ ad $\overline{oh}^2$; e $\overline{td}^2$ sta ad $\overline{oh}^2$ in ragion duplicata delle radici td ad oh; ed inoltre $td . oh :: 1 . 2$. Dunque $\overline{td}^2 . \overline{oh}^2 :: 1 . 4$. Sicchè $rto . rom :: 1 . 4$; e sostituendo YbS ad rom risulta finalmente $rto . YbS :: 1 . 4$. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA.

71. Perchè (n. 61) $bx = bY$; $oZ = bS$; sarà il rettangolo $bx \times oZ = YbS$. Dunque $rto . bx \times oZ :: 1 . 4$. Per la medesima ragione essendo anche $Yb \times hZ = YbS$ sarà ancora $rto . Yb \times hZ :: 1 . 4$.

PROPOSIZIONE VIII.

Primo. Le rette QT, TN, NV sono tre lati di un 14gono.
Secondo. Le rette QT, TM, MA sono tre lati di un 7gono.
Terzo. Ma di un 7gono inscritto entro un circolo, che passa &c. come si propose anche nel 5gono.

72. Le rette QT, TN, NV sono eguali, perchè si è già (n. 65) dimostrato, che TM = TQ. Onde anche TN posta in simile sito è eguale a TQ, ad NV &c. In secondo luogo essendo gli angoli di qualunque trapezio QTNV presi insieme eguali a quattro retti; ed essendo pure gli angoli TQV, NVQ eguali, come anche QTN eguale TNV; l'angolo QTN sarà complimento dell' angolo TQV ad un semicircolo. Ma l'angolo TQV (= DEZ) è (n. 53) = gr. $25 \frac{5}{7}$, quali però sottratti da gr. 180, restano gr. $154 \frac{2}{7}$ valore dell'

dell' angolo QTN. Ma gr. $154\frac{2}{7}$ è appunto il valore dell' angolo alla periferia di un 14gono. Dunque QTN, ovvero TNV ſono angoli alla periferia di un 14gono; e quindi le rette QT, TN, NV ſono tre lati di eſſo Poligono. Ciò che era la prima parte &c.

73. II. Le rette poi QT, TM, MA primieramente ſono, come già diſſi, (n. 65) eguali. Secondariamente eſſendo il triangolo QTM, ovvero TMA iſoſcele coi lati QT, TM, ovvero TM, MA eguali, gli angoli a detti lati oppoſti ſaranno parimenti eguali. Sottratti dunque TQM + QMT dalla ſomma di tutti gli angoli del triangolo QTM; cioè ſottratto gr. $25\frac{5}{7} + 25\frac{5}{7} = $ gr. $51\frac{3}{7}$ da gr. 180, il reſiduo gr. $128\frac{4}{7}$ ſarà il valore dell' angolo QTM, ovvero TMA. Ma per la prima di queſto Articolo queſto è appunto il valore dell' angolo alla periferia di un 7gono. Dunque gli angoli QTM, TMA ſono angoli alla periferia di un 7gono; e perciò le rette QT, TM, MA ſono &c. Ciò che era la ſeconda parte da dimoſtrare.

74. III. La prova poi dell' ultima parte, ſiccome è la medeſima, che fu addotta (n. 47.) per il 5gono, così a quella mi rimetto.

ARTICOLO SESTO.

Dell' Ottogono.

PROPOSIZIONE I.

Triſezione geometrica dell' angolo al centro di detto Poligono.

75. Prodotti i lati dell' 8gono (*Fig.* 8.) fino all' interſezione

zione

zione ultima possibile, gli angoli della Figura risultano, come siegue:

$$\text{Ang.}\quad MNB = \text{Gr. } 135$$
$$\left.\begin{matrix}BNT\\PEN\end{matrix}\right\} = \text{Gr. } 45 = \frac{360}{8}$$
$$\left.\begin{matrix}BTN\\BTE\end{matrix}\right\} = \text{Gr. } 90$$

$$\text{Onde } PEN = = \frac{BNT}{1} = \frac{BTN;\ BTE}{2} = \frac{MNB}{3}$$

Volendo perciò tripartire il 45 angolo al centro di detto Poligono si sottragga dell'angolo PEN = gr. 45 un angolo di gr. 30, possibile geometricamente, che il residuo gr. 15 sarà l'angolo ricercato, angolo, che si otterrebbe anche per altra maniera, cioè dividendo detti gr. 30 per metà.

Annotazione I.

76. Brilla in un tratto la trisezione dell'angolo MNB, ovvero FGP alla periferia dell' 8gono; perchè guidate le rette GN, GD, queste dividerebbero l'angolo FGP in tre parti ciascuna eguale a gr. $45 = \frac{135}{3}$. Cioè gli angoli PGN, NGD, DGF sarebbero eguali ciascuno a gr. 45. Il che è manifesto, perchè sono tutti angoli, che avendo il vertice nel punto G della circonferenza, insistono su archi eguali PBN, NMD, DQF; ed essendo ciascuno di questi archi sotteso da due lati dell' 8gono, ciascun arco è di $\overline{\text{gr. } 45 + 45} = 90$; e quindi, poichè gli angoli al centro sono doppj degli angoli alla periferia, detti angoli alla periferia PGN, NGD, DGF sono ciascuno di gr. 45.

Anno-

Annotazione II.

77. E' quì degno d'osservazione, che l'angolo al centro di questo Poligono è una terza parte dell'angolo alla sua periferia; e però l'angolo al centro di un 8gono è medio proporzionale tra un terzo di detto angolo al centro, e l'angolo intiero alla periferia. Cosicchè 15 . 45 :: 45 . 135; ovvero ∺ 15 . 45 . 135.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore RT (*che unisce i punti di concorso dei due lati* GP, NB; *e delli due* MN, PB *prodotti*), *e due interiori* PN, GM *sono cont. geom. propor. Dico* ∺ RT.PN.GM.

78. Menata la retta GN abbiamo EG.EP :: GN.PT; ma perchè (n. 76) si fece vedere, che l'angolo PGN = gr. 45, e però (n. 75) eguale all'angolo PEN, quindi anche i lati NE, GN a quelli opposti saranno eguali. Inoltre è NE = PE posta in simile sito. Dunque anche GN = PE. Ora sostituendo questo PE ad NG risulta EG. EP :: EP . PT. Ma per quella medesima ragione che è PE = NG, è anche PT = RE. E perciò sostituendo RE a PT, viene poi EG. EP :: EP. ER, cioè ∺ EG. EP. ER. Ovvero convertendo ∺ ER. EP. EG.

79. Ma le ordinate RT, PN, GM, perchè cadono dai punti medesimi R, P, G delle proporzionali medesime; e sono chiuse nel medesimo angolo HEK saranno nella medesima propor. che sono anche quelle. Onde ∺ RT.PN.GM. Ciò che era da dimostrarsi; e che fatta la costruzione d'intorno a quattro lati, abbiamo similmente dimostrato nel 7gono.

CON-

CONSEGUENZA I.

80. Hanno quì luogo le conseguenze appartenenti alla seconda Proposizione dell' 7gono. Imperocchè le parallele TP, NG, ed MY, che passa per F, sono pure contin. geom. proporzionali; e siccome ivi la qY, così quì la MY definisce nella EH un punto Y tale, che saranno ∺ ER.EP.EG.EY.

CONSEGUENZA II.

81. Menata Gx parallela a PB fino all' incontro dell' asse EQ, che passa per il centro C, accade che ∺ BR.BP.xG; verificandosi in appresso in questa figura, quanto si espose nella terza Proposizione del suddetto 7gono, con tutte tre le Conseguenze ivi dedotte.

CONSEGUENZA III.

82. Restringendomi solo a ricordare. 1. Che nel caso dell' 8gono, RG in vece di esser eguale all' ordinata PN, come succede nell'7gono, si ritrova solo eguale a PT; e così PY, in vece di esser eguale alla maggior ordinata GM, come ivi accade, quì si ritrova eguale ad NG. Secondo, è da osservare, che una retta YZ menata da Y parallela a GM passarà per il punto Q, e sarà quarta proporzionale alle altre tre. Mentre benchè passi YZ per Q, nonostante resta parallela ad MG, cioè l'angolo GYZ si mantiene tuttavia eguale all' angolo EGM = gr. $67 \frac{1}{2}$; perchè essendo YM parallela ad NG, l'angolo GYF sarà = EGN = gr. 45; ma nel triangolo YGF anche l'angolo FGY è = gr. 45. Dunque anche i lati FG, FY opposti ad angoli eguali saranno eguali, ed il triangolo isoscele. Ora perchè FY = FG, perciò

 sarà

sarà anche = FQ; ed il triangolo YFQ sarà pure isoscele; di cui l'angolo YFQ sarà per la costruzione composto di un retto YFA (= gr. 90) + AFQ (= LFG al vertice opposto = gr. 45) sarà, dissi, = gr. 90 + 45 = gr. 135; quali detratti da gr. 180, che è l'importare di tutti gli angoli del triangolo suddetto YFQ, sarà gr. 22 $\frac{1}{2}$ metà del residuo 45, valore dell'angolo FYQ; quale aggiunto all' angolo GYF eguale, come si è detto, e gr. 45, risultarà l'angolo intiero GYQ = 22 $\frac{1}{2}$ + 45 = 67 $\frac{1}{2}$ valore dell'angolo EGM. Siccome poi la YZ è menata dal punto Y, e che TP, NG, MY sono tre contin. geom. proporzionali; così essa YZ sarà pure terza proporz. alle NP, MG; e sarà quarta a tutte tre TR, NP, MG, giacchè sono anche comprese tutte nel medesimo angolo HEK. Onde ∺ TR.NP.MG.ZY.

CONSEGUENZA IV.

83. Una retta *ga* menata per A parallela alla suddetta MG, e compresa nel medesimo angolo HEK sarà un'altra contin. proporzionale alle suddette. Perchè essendo (n. 78) PT = ER, indi perchè PT = RG posta in simile sito, sarà ER = RG, e però ER. EG :: 1 . 2; ed essendo pure ER . EG :: RT . GM; quindi RT . GM :: 1 . 2. E però così sarà anche EG . E*a* :: 1 . 2; imperocchè essendo per il supposto *a*A parallela ad MG, ed MA parallela a G*a* per la costruzione, viene G*a* = MA = GA; ma GA = EG posta in simile sito. Onde siccome EG. EG + GA :: 1 . 2; così del pari sarà EG . EG + G*a* :: 1 . 2. Dunque anche GM . *ag* :: 1 . 2; dunque ∺ RT . GM . *ag*. Laonde essendo PN media proporzionale tra RT, ed MG, ed essendo poi YZ quarta proporzionale alle tre TR, NP, MG, anche detta YZ sarà media proporzionale tra GM, ed *ag*; e però ∺ TR . NP . MG . ZY . *ga*.

Anno-

Annotazione.

84. Benchè nella prova di queſta ſeconda Propoſizione non mi ſia ſervito del metodo praticato nella dimoſtrazione della ſeconda Propoſizione dell'Articolo antecedente, che è preciſamente l'iſteſſa, avrei nonoſtante potuto farlo rettamente, ſenza nè meno introdurre nella coſtruzione una linea di più. Di che ciaſcuno, come vuole, può farne da ſe l'eſperimento.

PROPOSIZIONE III.

La differenza, che paſſa tra il quadrato di una ſuttenſa a due lati, e quello della ſuttenſa a quattro (che è diametro del circolo circoſcritto all' 8gono) è eguale a due quadrati del lato GP *più due rettangoli* GPR.

Dico $\overline{PN}^2 = \overline{GM}^2 - 2\overline{GP}^2 - 2GPR$. *Secondariamente dico, che* $\overline{PN}^2 . \overline{GM}^2 :: 1 . 2$.

85. Eſſendo l'angolo PRN retto, troviamo per la 47. d'Euclide Lib. I., che $\overline{PN}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{NR}^2$. Ed eſſendo, per la quarta Lib. II., $\overline{NR}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{BR}^2 + 2NBR$; quindi $\overline{PN}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{NB}^2 + \overline{BR}^2 + 2NBR$.
E perchè $\overline{PR}^2 + \overline{BR}^2 = \overline{PB}^2 = \overline{GP}^2$; ed $NB = GP$; ed $NBR = GPR$, perciò riſulta * $\overline{PN}^2 = 2\overline{GP}^2 + 2GPR$.

86. Andiamo adeſſo in cerca del valore di $\overline{GM}^2$. Laon-

de essendo l'angolo GNM retto per la costruzione, sarà $\overline{GM}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NG}^2$; ma perchè è parimenti retto l'angolo GNE, e che (n. 78) $GN = NE$, il prodotto di tutta la GE nella sua metà definita dalla perpendicolare NR, cioè, per la 2. lib. II. Eucl., il rettangolo GER risulta eguale ad $\overline{NG}^2$. E perciò $\overline{GM}^2 = \overline{MN}^2 + GER$. Secondariamente avviene che $GER = \overline{GR}^2 + \overline{RE}^2$, cioè (perchè $GR = RE$) $GER = 2\overline{GR}^2$. E per questo $\overline{GM}^2 = \overline{MN}^2 + 2\overline{GR}^2$. Ora, per la 4. lib. II. Eucl., $\overline{GR}^2 = \overline{GP}^2 + \overline{PR}^2 + 2GPR$. Dunque $\overline{GM}^2 = \overline{MN}^2 + 2\overline{GP}^2 + 2\overline{PR}^2 + 4GPR$. Ed essendo poi $\overline{MN}^2 = \overline{GP}^2$; ed anche $2\overline{PR}^2 = \overline{GP}^2$ finalmente risulta

* $\overline{GM}^2 = 4\overline{GP}^2 + 4\,GPR$; dal qual valore sottraendo ora

* $\overline{PN}^2 = 2\overline{GP}^2 + 2GPR$ resta la differ. tra detti due quadrati

. . . $+ 2\overline{GP}^2 + 2GPR$. Onde concludo per ultimo, che $\overline{PN}^2 = \overline{GM}^2 - 2\overline{GP}^2 - 2GPR$. Ciò che era da dimostrarsi nella prima parte, e che sarebbe risultato in un tratto per altra via più spedita, se avessi aggiunto alla figura due rette, tralasciate per non confonderla.

87. Come che poi la seconda parte di questa Proposizione risulti dal solo valore de' quadrati suddetti, tuttavia la si può prestamente dimostrare anche così. Poichè (n. 83) ER . EG :: 1 . 2, abbiamo anche RT . GM :: 1 . 2; ma $\overline{PN}^2 . \overline{GM}^2$ :: RT . GM. Dunque $\overline{PN}^2 . \overline{GM}^2$ :: 1 . 2. Che era l'altra parte.

CON-

CONSEGUENZA.

88. Quindi ſeguita, che RT × GM . PN × YZ :: 1 . 2 Come parimenti $Q n B (= \overline{Pn}^2)$. $QcB (= \overline{Gc}^2)$ :: 1 . 2 . &c.

PROPOSIZIONE IV.

Il rettangolo della differenza YG *nella ſuttenſa a quattro lati* GM *è doppio del rettang. della differenza* GP (*lato del poligono*) *nella ſuttenſa* PN *a due lati*. *Dico* YGM = 2GPN.

89. Poichè (num. 80) ER . EP :: EG . EY ſono anche le differenze RP . PG :: PG . GY ; e componendo abbiamo RP . RP + PG :: PG . PG + GY ; cioè RP . RG :: LG . PY ; ed eſſendo pure per il luogo citato RP = LG . RG = PT ; PY = GN ; viene queſt' altra analogia LG . PT :: PG . GN . E però il rettang. GPT = rettang. LGN . Perchè poi PN, GM ſono nella medeſima ragione di PT ad NG ; ſoſtituendo perciò da una parte dell' equazione PN in vece di PT, e dall' altra parte GM in vece di NG, ſarà pure GPN = LGM.

Eſſendo ora ſiccome ∺ ER . EP . EG ; così le differenze ∺ RP . PG . GY . E perchè il terzo termine EG è per la coſtruzione doppio del primo termine ER, così la terza differenza GY è doppia della prima differenza RP, ovvero LG, cui è eguale. Sarà perciò rettang. YGM = 2LGM ; e perchè GPN = LGM, ſarà per fine YGM = 2GPN. Ciò che era da dimoſtratſi.

CONSEGUENZA I.

90, Perchè ſono ∺ ER . EP . EG . EY . E*a*. ordinate nella me-

medesima proporzione, che $\div$ RT . PN . GM . YZ . *ag*; perciò siccome il rettang. YGM accade che sia eguale a due rettangoli GPN. Così sarà GPN $=$ 2PRT; *a*YZ $=$ 2YGM. Onde in somma supposto il primo rettangolo PRT $=$ 1, sarà GPN $=$ 2; YGM $=$ 4; *a*YZ $=$ 8 &c.

CONSEGUENZA II.

91. Essendo per la costruzione divisa la HP per metà in L, siccome mostrammo (n. 83) che la EG posta in simile sito è divisa per metà in R, e risultando dal n. 75 che LY $=$ LG, quindi anche HY $=$ GP; e perciò tutta la retta EH $= 3GP + 4PR$. Onde $\overline{HE}^2 = 17\overline{GP}^2 + 24GPR$. Questa espressione somministra il mezzo di comparare degli altri piani spettanti alla Figura.

PROPOSIZIONE V.

Le rette HG, GN, NV *sono tre lati di un 8gono ordinato in un circolo, di cui il raggio è* $= \frac{cGH}{GP}$.

92. Le rette HG, GN, NV sono in primo luogo eguali per la costruzione, e per il n. 78. L' angolo poi HGN, ovvero GNV è eguale all' angolo HGF + FGN, cioè all' angolo PEN ($=$ gr. 45) + BTN ($=$ 90) in tutto $=$ gr. 135 valore appunto dell' angolo alla periferia di un 8gono. Secondariamente siccome sta il lato GP al raggio cG, così sta il lato HG ad una quarta proporzionale, raggio del circolo circoscritto a detto 8gono HGNV &c. Onde detto raggio risulta, quale si propose $= \frac{cGH}{GP}$. Ciò che era il tutto, che dovevasi dimostrare.

ARTI-

ARTICOLO SETTIMO.

Dell' Enneagono.

PROPOSIZIONE I.

Valore degli angoli dell' Enneagono.

93. Il valore degli angoli (*Fig.* 10. *Tav.* 30.) formati dai lati di un 9gono, che prodotti s'interſeccano reciprocamente riſulta così:

$$
\begin{aligned}
\text{Ang. } D e o &= \text{gr. } 140 \\
q e o &= \text{gr. } 40 = \frac{360}{9} \\
e q o &= \text{gr. } 100 \\
e q N &= \text{gr. } 80 \\
q NQ &= \text{gr. } 60 \\
q NE &= \text{gr. } 120 \\
NEA &= \text{gr. } 20
\end{aligned}
$$

$$\text{Onde } NEA = \frac{qeo}{2} = \frac{qNQ}{3} = \frac{eqN}{4} = \frac{eqo}{5} = \frac{qNE}{6} = \frac{Deo}{7}.$$

E quindi troviamo, che nei ſuddetti valori queſto Poligono non ammette la triſezione geometrica dell' angolo, nè al centro, nè alla periferia.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate una eſteriore mQ *(che uniſce i punti di concorſo di un lato* nD*, e di una ſuttenſa a due lati* Be*; poi di un altro lato* GB*, ed un' altra ſuttenſa a due lati* Do *), e due interiori* BD, G*n ſono contin. geom. proporzionali. Dico* ∺ *m*Q. BD. G*n*.

94. Coſtrutta la Figura come le antecedenti, rilevaſi che EG.

EG . GD :: EB . BQ ovvero EG . EB :: GD . BQ.
RG . GD :: R*d* . *de* RG . R*d* :: GD . *de*

Ma essendo BQ = *de* posta in simile sito , quindi
EG . EB
RG . R*d* } :: GD . BQ ; e però EG . EB :: RG . R*d*

Ma EB = RG per la costruzione ; ed R*d* = E*m*, supposto il punto *m* determinato da una retta menata per D*o* , siccome il punto *d* è determinaro da una retta menata per *e*B posta in simile sito . Dunque sostituendo queste a quelle nasce ∺ EG . EB . E*m*. Dunque senz' altro ∺ G*n* . BD . *m*Q. Ovvero ∺ *m*Q . BD . GN. perchè sono parallele , e compresse nel medesimo angolo . Ciò che era da dimostrarsi.

CONSEGUENZA I.

95. Quindi sono continue geom. proporzionali anche le ∺ QB . DG . *ny* , ed anche le ∺ *m*Q . BD . G*n* . *yt*. Come altrove si è notato in simili circostanze.

CONSEGUENZA II.

96. Se fosse condotta una retta da N ad I , in simil modo provarebbesi, che questa taglia la EV in un tal punto per esempio *x* , che EA . E*x* :: E*m* . EB . ovvero EB . EG. Onde calando da detto punto *x* una parallela alle sopraddette ordinate G*n* . BD &c. la qual fosse compresa nel medesimo angolo VEK, verrebbe parimenti G*n* . BD :: detta parallela condotta per *x* . AN.

PROPOSIZIONE III.

GB *sta ad* AB , *come* GA *ad* AE, *come* EG *ad* EV , *cioè* GB . AB :: GA . AE :: EG . EV.

97. Anche questa Proposizione si deduce facilmente dalla costru-

costruzione della Figura, perchè primo EG . G*n* :: EV. VK; ma G*n* = GD posta in simile sito, e questa GD = GA, perchè l'angolo GAD essendo eguale all'angolo *qn*Q= gr.60, è esso pure = gr. 60, angolo alla periferia di un triangolo equilatero. Onde essendo poi anche AG, AD eguali, viene GD = GA, e però anche G*n* eguale al medesimo GA. Così VK essendo eguale ad RE posta in simile sito, ed essendo l'angolo RAE = gr. 60, sono i lati AR, RE, EA eguali, onde è VK = AE; e perciò la suddetta proporzione si trasmuta in questa EG. GA :: EV. EA; ovvero
* GA . AE :: EG. EV.

98. Secondariamente abbiamo *o*B . B*e* :: *o*F . FZ; ma *o*B = GB; B*e* = BA, perchè BA = A*e*, e l'ang. BA*e*= gr. 60. Così *o*F = GA posta in simile sito; ed FZ = AE, imperocchè da gr. 180 somma di tutti gli angoli del triangolo F*o*Z tolto via l'angolo F*o*Z = gr. 140 angolo alla periferia di un 9gono, resta gr. 40, metà de' quali gr. 20 viene ad essere il valore dell' angolo FZ*o*; ma questo è pur valore dell' angolo FTZ, ovvero AEN posto in simile sito, e per la prima Proposizione = gr. 20. Essendo perciò in quest' altro triangolo FTZ gli angoli FTZ, TZF eguali, anche i lati TF, FZ ad essi opposti saranno eguali. E perchè AE è posto in simile sito di FT sarà anche ad esso eguale, sarà dunque eguale anche ad FZ. Sostituendo dunque nella proporzione questi valori risulta * GB. BA :: GA. AE. Onde poichè avemmo poco fa * GA. AE :: EG. EV. Ora finalmente troviamo GB. BA :: GA. AE :: EG. EV. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE IV.

Così sta aG *a* GB, *come* aB *a* BD, *come* aA *ad* AE.
Cioè aG . GB : : aB . BD : : aA . AE.

99. A prima vista la Figura ci dà *qo.oe*::*q*B.BD::*q*F.FH. Ma incontriamo queste eguaglianze *qo* = *a*G; *oe* = GB; *q*B = *a*B; *q*F = *a*A; perchè poste ciascuna in simili siti della Figura; ed è pure FH = AE, perchè FH = FZ posta in simile sito, e che per la ragione addotta nell' antecedente è eguale ad AE. Dunque presi in iscambio questi valori *a*G . GB :: *a*B . BD :: *a*A . AE. Ciò che era &c.

CONSEGUENZA.

100. Menata una retta da A ad F, potrebbesi questa sostituire in vece del termine *a*A, perchè sono eguali. Sono poi eguali, perchè dal triangolo ABF sottratto l'angolo ABF = D*eo* = (n. 93) gr. 140, la metà 20 del residuo 40 (giacchè FB, BA sono eguali) sarà il valore dell'angolo AFB, a cui se si aggiunge l'angolo BF*a* = QN*q* posto in simile sito, e per il num. suddetto = gr. 60, sarà la somma di detti angoli AFB + BF*a*, cioè AF*a* = 20 + 60 = 80; ma F*a*A = *eq*N posto in simile sito, e per il luogo sopracitato = gr. 80. Dunque giacchè AF*a*, A*a*F sono eguali, anche i lati A*a*, AF a detti angoli opposti saranno eguali, com' era proposto.

PROPOSIZIONE V.

Così sta SB *ad* SA, *come* BG *ad* AB.

101. Dalla costruzione della Figura si ricava, che guidata

data AN ſiano *qo*. *oe* :: *q*A . AN; ovvero *qo*. *q*A :: *oe*. AN. Ma *qo* = SB; *q*A = SA; *oe* = BG, per eſſere poſte ciaſcuna in ſiti ſimili; ed AN = BA, perchè eſſendo AN parallela ad S*o*, ed oppoſta al medeſimo angolo ABN, ſiccome S*o* è per la coſtruzione eguale ad SB, così AN è eguale ad AB. Fatta dunque la ſoſtituzione di queſte quantità a quelle, la ſuddetta proporz. ſi traſmuta così SB.SA :: BG.BA. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE VI.

Primo. Le rette TF, FH, HM *ſono tre lati di un 18gono.*
Secondo. Le rette TF, FZ, ZY *ſono tre lati di un 9gono. inſcritto entro un circolo, che paſſa pel centro* C *del 9gono interiore* oBG *&c.*
Terzo. e tiene il proprio nella periferia dell'eſter. T,R,E *&c.*

102. La prova della prima e ſeconda parte di queſta Propoſizione è la medeſima che ſi usò negli Articoli antecedenti. Circa poi alla terza parte baſta oſſervare, che i lati di quel 9gono TR, RE, EY &c. ſono eguali ai lati TF.FZ,ZY di queſto. Onde dobbiamo pure aſſerire, che riſultino eguali anche i raggi de' circoli circoſcritti a detti 9goni; e quindi ſiccome queſto paſſa con la ſua circonferenza pel centro di quello, così quello reciprocamente deve con la ſua paſſare pel centro di queſto. E tanto baſti per la intiera prova di quanto era propoſto.

ARTICOLO OTTAVO.

Del Decagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di esso Poligono.

103. Prodotti i lati di questo Poligono farebbero ancora un' intersezione, come (*Fig. 12. Tav. 30.*) la fanno i due lati AF, MB in S, e li due TA, BD in V, ma ne verrebbe poi un 10gono interrotto, e solo risultante da due differenti 5goni intrecciati insieme ad eguali distanze. Inoltre non sarebbero nè men nuovi nella Figura gli angoli, che ne verrebbero di più; perchè uno LSX, ovvero LVI è = gr. 36 = DBQ, che già abbiamo anche lasciando la Figura così; l' altro *a*XS, ovvero *m*LV = gr. 108. è pure eguale all' angolo BQD, come or ora osserviamo.

Ang. MBD = gr. 144

$$\left.\begin{matrix}DBQ\\XSL\end{matrix}\right\} = \text{gr. } 36 = \frac{360}{10}$$

$$\left.\begin{matrix}aXS\\BQD\end{matrix}\right\} = \text{gr. } 108$$

$$\left.\begin{matrix}EQX\\QXE\end{matrix}\right\} = \text{gr. } 72$$

$$\text{Onde } XSL = \frac{DBQ}{1} = \frac{EQX ; QXE}{2} = \frac{BQD ; aXS}{3} = \frac{MBD}{4}.$$

E perchè abbiamo già (n. 20) veduto, come si conseguisca geometricamente l'angolo = gr. 24, la sua metà 12 sarà = $\frac{36}{3}$ eguale ad un terzo dell' angolo al centro del 10gono, cioè eguale all' angolo al centro di un 30gono.

Anno-

Annotazione.

104. E' da notare che 48. il doppio del suddetto n. 24. sarà eguale a $\frac{144}{3}$, eguale perciò ad un terzo dell'angolo alla periferia del proposto Poligono.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore xf *(che unisce i punti di concorso di un lato* AF, *e di una suttensa a due lati* BE; *poi di un altro lato* MB, *ed un'altra suttensa a due lati* FD), *e due interiori* FB, AM *sono contin. geom. propor. Dico* ∺ xf. FB. AM.

105. Prodotta quinci e quindi in Y ed f la DF suttensa a due lati, e prodotta anche in x la BE pur suttensa a due lati; e menata poi la xf, FB, AB, AM abbiamo

SA . AB :: SF . Ff ovvero SA . SF :: AB . Ff
VA . AB :: VY . YD ovvero VA . VY :: AB . YD.

ma YD = Ff perchè posta in simile sito. Onde

SA . SF } VA . VY } :: AB . Ff; e però SA . SF :: VA . VY.

Ma VA = SF posta in simile sito; ed VY = Sx, supposto il punto x determinato da una retta guidata per BE, siccome il punto Y è determinato da una retta menata per DF posta in simile sito. Dunque sostituendo questi termini a quelli risulta SA . SF :: SF . Sx; ovvero ∺ SA. SF. Sx. E quindi ∺ AM . FB . xf, ovvero ∺ xf. FB. AM, perchè sono parallele, e comprese nel medesimo angolo MSA. Ciò che era da dimostrarsi, e che (supposta la costruzione d'intorno a cinque lati) è quanto si è pur dimostrato nella seconda del Poligono antecedente.

PRO-

PROPOSIZIONE III.

Primo. Le tre ordinate LX, FB, KN *sono contin. geom. propor. sono* ∺ LX . FB . KN.
Secondo. LX + FB = KN; onde ∺ LX. FB. LX + FB.

106. Le ragioni che principalmente abbondano in questo Poligono sono le medesime che regnano nel 5gono. La maggior parte sono linee rette divise *media & extrema ratione*. Pertanto dobbiamo osservare anticipatamente che i lati LB, SL del triangolo SLB sono eguali, perchè opposti agli angoli DBQ XSL (n. 103) eguali; ed anche FB essendo per la medesima ragione eguale ad LB viene ad esser eguale a detto lato SL, che è eguale ad LA = FK, perchè per la simetrìa della figura LA, LB, FK sono eguali. Non altrimenti FN è eguale ad SF; ed NK (perchè per l'eguaglianza degli angoli opposti è eguale ad FN) risulta pure eguale ad SF; siccome per tale eguaglianza è anche LX = LF = FC &c.

107. Essendo pertanto SF . FB :: SK . KN; ovvero FB . SF :: KN . SK; ed essendosi trovato di sopra (n. 106.) FB = SL; KN = SF; perciò SL . SF :: SF . SK; cioè ∺ SL . SF . SK. Quindi anche le ordinate cadenti dai punti L, F, K comprese nel medesimo angolo KSN saranno contin. geom. propor. cioè saranno ∺ LX . FB. KN. Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

108. Ma LX = LF, come sopra si disse; KN = SF. Dunque avremo ∺ LF. SL. SF; e la retta SF divisa *media & extrema ratione* in L, ed eguale ad LF + SL. Perciò non altrimenti sarà LX + FB = KN. In fatti si dimostrarebbe anche per altra via, che essa retta è così divisa in P, che KP = LX; PN = FB. Dunque per fine ∺ LX. FB. LX + FB. Ciò che era l'altra parte.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

L'ordinata FB *taglia l'asse* eq (*cioè la* EP *suttensa a quattro lati del* 10*gono*) *così, che* ⸬ en. nc. $\overline{en + nc}$ = cq.

109. Essendo primieramente gli angoli EQX, EXQ alla base del triangolo XEQ (n. 103) = gr. 72., e l'angolo al vertice QEX = gr. 36 risultano gli angoli alla base di detto triangolo XEQ doppj ciascuno dell'angolo al vertice. Ma perchè si scorge dalla Figura, che a questo è simile anche l'altro triangolo XGM, perchè hanno due lati XE, XG, ed anche XQ, XM coincidenti, ed i lati EQ, GM paralleli, quindi del pari ambidue avranno gli angoli alla base doppj dell'angolo al vertice.

110. Ora quando si meni una retta da X per D al centro C, perchè questa forma l'angolo XcM eguale agli angoli di detti due triangoli, cioè eguale a gr. 72. (giacchè XcM doppio dell'angolo DcB al centro di un 10gono è a gr. 72. eguale) perciò taglia (n. 27) il lato GM del triang. XGM *media & extrema ratione* in c. Taglierà dunque così anche il lato EQ in D del triang. XEQ. E quindi avremo ordinati in progression continua geometrica li triangoli XDQ, EQX, MXE, ovvero BLF; e non altrimenti le basi ⸬ DQ. QX. LF; ma DQ = *m*F posto in simile sito; QX = XD = DE per l'eguaglianza degli angoli opposti, ed anche eguale ad FA posto in simile sito. E per questa medesima ragione LF = *m*A = AK. Dunque ⸬ *m*F. FA. *m*A, ovvero AK. Onde le ordinate tirate da detti punti nell'asse *eq* lo divideranno nella medesima proporzione, ed avremo ⸬ *en*. *nc*. $\overline{en + nc}$ = *cq*. Ciò che era &c.

Con-

CONSEGUENZA I.

111. Essendo mK, DP per la costruzione parallele e chiuse tra le mD, KP parallele parimenti per la costruzione, le mK, DP risultano eguali. Onde calata giù un' ordinata da F, il diametro DP del circolo circoscritto al 10gono sarà da essa segato così ∺ Do. oC. $\overline{Do + oc} = cP$.

CONSEGUENZA II.

112. Conciossiacchè abbiamo avuto di sopra (n. 107) ∺ SL ($=$ LA). SF ($=$ LK). SK. e quivi (n. 110) abbiamo ∺ mF. FA. AK; ed anche ∺ DQ. QX. LF. alla qual progressione si potrebbe aggiungere il quarto termine LA, siccome nella progressione de' triangoli XDQ, EQX, MXE si potrebbe aggiungere il triangolo MXG, ovvero LAZ, che ha per base LA, onde verrebbero ∺ DQ. QX. LF. LA; quindi poi sarebbero tutti li termini contin. propor. schierati su d'una medesima retta così ∺ mF. FA ($=$ QX). LF. LA. LK. SK.

CONSEGUENZA III.

113. Essendo simili i triangoli aEe, aFn, aGc, ed inoltre (n. 110) ∺ mF. FA. AK, cioè ∺ aE. EF. FG. poste in simili siti, saranno ancora ∺ ae. en. $\overline{nc} = an$.

PROPOSIZIONE V.

Il quadrato del raggio del circolo circoscritto ad un 10gono è eguale al rettang. del suo lato nella suttensa a tre di essi lati. Dico $\overline{Ac}^2 = AFB$.

114. Abbiamo trovato (n. 112) ∺ AF. FL ($=$LX). LA; ma FL, ovvero LX $=$ Ac, prima perchè LX, AC sono per

per la costruzione parallele, e poi sono anche intercette fra due altre LA, Xc parallele pure per la costruzione; onde debbono essere anche eguali. La retta poi LA è (n. 106) = FB. Sostituendo pertanto Ac ad FL, ovvero LX, ed FB ad LA, la proporzione si trasforma così

÷ AF. AC. FB. Onde viene $\overline{Ac}^2$ = AFB. Ciò che &c.

CONSEGUENZA.

115. Poichè A*m*, *m*D, Dc sono ciascuna eguale al raggio Ac, e che l'angolo A*m*D è eguale all'angolo AFB, potrebbesi al quadrato $\overline{Ac}^2$ sostituire il rombo A*m*Dc, ed al supposto rettangolo AFB il romboide AFB; onde verrebbe il rombo A*m*Dc = AFB romboide; e levando a tutti due la parte comune AF*o*c restarebbe c*o*B = F*m*D*o*.

116. Ora deriva dal n. 110, che FB è divisa *media & extrema ratione* in *o*; sarà dunque per la 30. Lib. 6. Euclide c*o* = *o*B; onde sia cD × *o*B = B*o*D + c*o*B. Ma cD × *o*B = AF*o*c; indi c*o*B = F*m*D*o*; fatta dunque la sostituzione risulta AF*o*c = $\overline{BoD + FmDo}$ = *m*FB = FB × *o*D. Quindi perchè *o*c . *o*D :: *n*c . *ne* seguita gentilmente che Ac × c*n* = FB × *ne*; onde tutta AM × *cn*. FB × *ne* :: 2. 1.

PROPOSIZIONE VI.

Il rettangolo di una retta guidata dal centro c *della Figura fino all' ultima intersezione* S *moltiplicata per* BH *suttensa a due lati del* 10*gono interiore è eguale al rettang. di una* NG *suttensa a* 4. *lati del* 10*gono esteriore moltiplicata per la retta condotta da detto* c *alla seconda intersezione* a. *Dico* CS × BH = NG × ca.

117. Avvegnachè questa Proposizione porti in fronte una

cett' aria recondita, non lascia di non essere semplicissima, per non dire ridicola. Bastava dire che $ca = BH$; e chè $cS = NG$; d'onde veniva tosto $ca . cS :: BH . NG$, e quindi $cS \times BH = NG \times ca$.

Le rette ca, BH sono eguali, perchè sono due parallele intercette fra due altre parallele LZ, FN, come chiaro apparisce dalla sola simetrìa della Figura; dalla quale pure, e da quanto altrove (num. 106.) si disse risultando $SF = FN$; $FB = FK$; $SB = KN$; e non altrimenti $Fc = cB$; $FG = GK$; e tutte le Fc, cB, FG, GK eguali, siegue che cS; GN siano pure eguali per essere diagonali di due trapezj SFcB, NKGF simili ed eguali, perchè formati dalle suddette linee rispettivamente eguali.

PROPOSIZIONE VII.

Primo. Le rette KF, FB, BN *sono tre lati ordinati nella periferia di un 5gono.*

Secondo. Le rette LF, Fc, cB, BX, XL *sono cinque lati di un 5gono perfetto.*

Terzo. Il di cui centro è situato nel punto d'intersezione delle due suttense BE, DF.

118. I. Primieramente le rette KF, FB, BN sono (n. 106.) eguali. Secondariamente da gr. 360, somma di tutti gl'angoli del trapezio FEDB sottratti li due alla periferia di un 10gono FED, EDB, cioè gr. $\overline{144 + 144} = 288$, e diviso per metà il residuo 72, sarà gr. 36 valore dell'angolo EFB, il quale sottratto da tutto l'angolo $EFK =$ gr. 144, resta gr. 108. per l'angolo BFK. Ma questo è valore dell' angolo alla periferia (n. 20) di un 5gono. Dunque per essere anche gli angoli KFB, FBN eguali, le rette KF, FB, BN sono tre lati &c. Ciò che era la prima parte.

119. II. Le rette poi LF, Fc, cB, BX, XL sono (n. 106.) egua-

eguali, e facilmente si rileva, che gli angoli da esse compresi sono ciascuno eguali a gr. 108 valore dell' ang. alla periferia di un 5gono. Dunque le rette LF, Fc &c. che era l'altra parte da dimostrarsi.

120. III. Facilmente trovasi anche che il centro di questo pentagono sia collocato nel punto d' intersezione delle due rette BE, DF senza trattenersi con disaggio in una positiva dimostrazione; onde suppongasi già soddisfatto anche a quest' ultima parte.

ARTICOLO NONO.

Del Endecagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geom. dell' angolo al centro dell' Endecagono.

121. Ecco preventivamente (*Fig.* 131, *Tav.* 31.) esposti i valori di questo Poligono.

Ang. $hba = $ gr. $147\frac{3}{11}$

$abQ = $ gr. $32\frac{8}{11} = \frac{360}{11}$

$bQa = $ gr. $114\frac{6}{11}$

$aQA = $ gr. $65\frac{5}{11}$

$QAD = $ gr. $81\frac{9}{11}$

$QAR = $ gr. $98\frac{2}{11}$

$SRA = $ gr. $49\frac{1}{11} = \frac{147\frac{3}{11}}{3}$

 SRX

$SRX = gr.\ 130\ \frac{10}{11}$

$RXE = gr.\ 16\ \frac{4}{11}$

Onde $RXE = \frac{abQ}{2} = \frac{SRA}{3} = \frac{aQA}{4} = \frac{QAD}{5} = \frac{QAR}{6} = \frac{bQa}{7} = \frac{SRX}{8} = \frac{hba}{9}$.

Quindi basta sottrarre un angolo, come geometricamente si può, di gr. 120 dell' angolo $SRX = gr.\ 130\ \frac{10}{11}$, che il residuo gr. $32\ \frac{8}{11}$ sarà la terza parte dell' angolo al centro del 11gono, e sarà l'angolo al centro di un 33gono.

Annotazione I.

122. La trisezione geometrica dell'angolo alla periferia di questo Poligono non può essere più felice, perchè l'angolo $SRA = gr.\ 49\ \frac{1}{11}$ è appunto $= \frac{147\frac{3}{11}}{3}$ cioè eguale ad un terzo dell' angolo h*ba* alla periferia del 11gono.

Annotazione II.

123. Notate che il valore degli angoli RXE, SRA, h*ba* è come 1 . 3 . 9 . cioè in tripla proporzione geometrica. Così ancora gli angoli *ab*Q, *a*QA, SRX sono come li tre numeri ordinati in proporzione dupla geometrica 2 . 4 . 8 .

PRO-

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore rq (*che unisce i punti di concorso di un lato* ab, *e di una suttensa a tre lati* nh; *poi di un altro lato* mn, *e di un' altra suttensa a 3 lati* be), *e due interiori* nb, ma *sono contin. geom. propor. Sono dico* ∺ rq. nb. ma.

124. Costrutta pertanto la figura, come già si suole, rileviamo che $\begin{matrix} Fm.\ mb :: Fn.\ nq \\ Bm.\ mb :: Bd.\ dh \end{matrix}$ ovvero $\begin{matrix} Fm.\ Fn :: mb.\ nq \\ Bm.\ Bd :: mb.\ dh \end{matrix}$ Ma $dh = nq$. posta in simile sito della figura. Dunque $\left.\begin{matrix} Fm.\ Fn \\ Bm.\ Bd \end{matrix}\right\} : mb.\ nq$; e però $Fm.\ Fn :: Bm.\ Bd$. Ma abbiamo $Bm = Fn$; $Bd = Fr$, supposto il punto r determinato da una retta condotta per be; siccome il punto d fu determinato dalla retta hn prodotta e posta in simile sito. Sostituendo dunque questi termini a quelli, viene $Fm.\ Fn :: Fn.\ Fr$; ovvero ∺ $Fm.\ Fn.\ Fr$. D'onde per conseguenza risulta ∺ $ma.\ nb.\ rq$ perchè sono parallele, calate giù dai punti m, n, r comprese nel medesimo angolo mFa. Dunque poichè è lo stesso ∺ $rq.nb.ma$ ciò che era da dimostrarsi.

CONSEGUENZA.

125. Per la medesima ragione ∺ $nq.\ mb.\ ya$; e calata da y la yt abbiamo pure ∺ $rq.\ nb.\ ma.\ yt$.

Annotazione I.

126. Non d'altra maniera provarei, che Fc; FV ed un' altra compresa tra F ed un punto su la FV determinato per

una

una retta condotta per fN, sarebbero tre contin. geometriche proporz. siccome anche di leggiero si scorge che $Fm.Fn :: Fc.FV :: Fx$ (supposto il punto x determinato da una retta, che fosse guidata per gG). FT.

Annotazione II.

127. Le eguaglianze lineari che occorrono in questo Poligono sono $Tn = nb = nq$; $TK = KH$; $TB = TL$; $fc = pc$ condotta che fosse; $oP = PZ$; $NV = Vn$; e forse ve ne saranno dell' altre da me non avvertite, tutte risultanti dall' eguaglianza degli angoli ai quali rispettivamente sono opposte. Perciò può chi vuole sostituire queste ad altri termini, che sono nelle proporzioni regnanti in questo Poligono, il numero delle quali proferiremo a suo (n. 144) luogo, non avendo voglia presentemente d'inoltrarmi di più.

PROPOSIZIONE III.

Le rette ZM, MH, H& *sono tre lati di un 22gono.*
Le rette ZM, MR, RX *sono tre lati di un 11gono descritto in un circolo &c. come fu enunziato altrove.*

128. Abbiamo detto poco fa (n. 127.) che $TB = TL$; ed è $TB = ZM = H\&$ poste in simile sito; così pure $TL = MH = MR$ poste in simile sito. Dunque le rette ZM, MH, H&, ed anche ZM, MR, RX sono eguali. Che poi gli angoli ZMH, MH& siano eguali, ed angoli alla periferia di un 22gono; e che gli angoli ZMR, MRX siano alla periferia di un 11gono, si rileva nella medesima maniera che si tenne ne' Poligoni antecedenti. E così nel medesimo modo si dimostra che questo Endecagono è inscritto entro un circolo, che passa &c.

AR-

ARTICOLO DECIMO.

Del Dodecagono.

PROPOSIZIONE I.

Valore degli angoli di questo Poligono.

139. Esaminato il valore degli angoli di questo Poligono (*Fig.* 14., *Tav.* 32.) lo troviamo quale segue

Ang. abd = gr. 150

$\left.\begin{matrix} bdq \\ HFD \end{matrix}\right\} =$ gr. 30 $= \frac{360}{12}$

$\left.\begin{matrix} bqd \\ BHF \end{matrix}\right\} =$ gr. 120

$\left.\begin{matrix} drB \\ BDG \end{matrix}\right\} =$ gr. 60

$\left.\begin{matrix} rGD \\ rBq \end{matrix}\right\} =$ gr. 90

Onde $HFD = \frac{bdq}{1} = \frac{drB;BDG}{2} = \frac{rGD;rBq}{3} = \frac{bqd;BHF}{4} = \frac{abd}{5}$

Se per questi valori fosse possibile la trisezione geometrica dell'angolo di gr. 30 al centro di questo Poligono; ovvero di gr. 150 alla periferia, sarebbe data anche la descrizione geometrica del 9gono. Perchè aggiungendo gr. $\frac{30}{3}$ cioè gr. 10 al medesimo 30, verrebbero gr. 40 valore dell' angolo al centro di detto 9gono. Così pure sottratto da gr. 90 un terzo di gr. 150, cioè gr. 50, restarebbero pur anche gr. 40 per il suddetto angolo al centro di detto 9gono. Ma non abbiamo nè l'uno nè l'altro, perchè veramente queste

queste tali descrizioni dipendono da un' arte tuttavia incognita di dividere la periferia di un circolo in parti date.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore Xp (*che unisce i punti di concorso di un lato* la, *e di una suttensa a tre lati* ob; *poi di un altro lato* go, *e di un' altra suttensa a tre lati* ae), *e due interiori* oa, gl *sono cont. geom. propor. dico* ∺ Xp . oa . gl.

130. Guidate le linee necessarie alla costruzione quali sono in figura abbiamo

Fg . ga :: Fo . op ovvero Fg . Fo :: ga . op.
Kg . ga :: KN . Nb ovvero Kg . KN :: ga . Nb.

Ma Nb = op posta in simile sito; onde

Fg . Fo } Kg . KN } :: ga . op; e però viene Fg . Fo :: Kg . KN.

Ma Kg = Fo posta in simile sito della Figura. Siccome KN = FX, supposto il punto X determinato da una retta condotta per *ae*; come il punto N è definito da una retta menata per *b o* posta in simile sito. Onde fatta la sostituzione risulta Fg. Fo :: Fo . FX; ovvero ∺ Fg. Fo. FX; e quindi anche le parallele comprese nel medesimo angolo ∺ Xp . oa . gl. Ciò che era da dimostrarsi, e che (supposta la costruzione applicata d'intorno a sei lati) abbiamo precisamente dimostrato anche nella seconda del 11gono.

PRO-

PROPOSIZIONE III.

Sta Fg *ad* Fo, *come* Fm *ad* FG. *Cioè* Fg . Fo :: Fm . FG.

131. La Figura ci presenta tosto da osservare, che
F*g* . *ga* :: F*m* . *m*Q ovvero F*g* . F*m* :: *ga* . *m*Q.
K*g* . *ga* :: K*n* . *nq* K*g* . K*n* :: *ga* . *nq*.
Ma *m*Q = *nq* posta in simile sito ; onde
F*g* . F*m* } K*g* . K*n* } :: *ga* . *m*Q ; e però F*g* . F*m* :: K*g* . K*n*;
ma K*g* = F*o* posta in simile sito ; K*n* = FG per la stessa ragione. Dunque abbiamo F*g* . F*m* :: F*o* . FG ; ed alternando F*g* . F*o* :: F*m* . FG . Ciò che era &c.

CONSEGUENZA.

132. Sicchè qualunque parallele cadenti dai punti *g*, *o*, *m*, G comprese nel medesimo angolo *a*F*g*, saranno pure proporzionali, come per esempio le *gl*, *oa*, una retta condotta da *m* a quelle parallela, GQ.

PROPOSIZIONE IV.

Determinato su la Fg *il punto* y *per una retta condotta da* Q *per* B. *Dico che* ∺ Fm . FG . Fy.

133. Determinato su la K*g* il punto *x* da una retta guidata per BG , abbiamo
F*m* . *m*Q :: FG . G*f* ovvero F*m* . FG :: *m*Q . G*f*.
K*n* . *nq* :: K*x* . *x*B K*n* . K*x* :: *nq* . *x*B.
Ma *nq* = *m*Q ; *x*B = G*f* perchè poste in simili siti . Dunque

$\left.\begin{array}{l} Fm . FG \\ Kn . Kx \end{array}\right\}$ $mQ . Gf$; e però $Fm . FG :: Kn . Kx$.
Ma $Kn = FG$ posta in simile sito; e $Kx = Fy$, determinato il punto y da una retta guidata per QB, siccome il punto x fu determinato da una retta guidata per BG, posta in simile sito. Dunque fatta la sostituzione $Fm . FG :: FG . Fy$. Ovvero $\div\!\!\div Fm . FG . Fy$. Ciò che era da dimostrarsi.

CONSEGUENZA.

134. Qualunque parallele comprese nel medesimo angolo gFl cadenti dai punti m, G, y saranno pure &c.

Annotazione I.

135. Essendo (n. 129.) l'angolo $gDa = BDG =$ gr. 60; ed i lati Dg, Da eguali, il triangolo Dga è equilatero; onde $ga = gD$. Ma $gD = DF$, perchè gli angoli DaF, DFa essendo per il num. suddetto eguali, anche i lati Da, DF a quelli opposti sono eguali. E quindi risulta Fg doppia di ga; Fo doppia di op; Fm doppia di mQ &c.

Anotazione II.

136. Le eguaglianze poi lineari, che s'incontrano in questa figura sono molte. Imperocchè essendo, come ho pur ora detto, il triangolo Dga equilatero, quindi ciascuna retta parallela ad uno de' suoi lati ga, e compresa nel medesimo angolo gDa, ha le sue eguali. Onde $ob = bD$; $mq = qD$; $GB = BD$ &c. Inoltre perchè gli angoli (n. 129) rGD, ovvero rBD; ed rBq sono retti, e la metà dell'angolo GrB ($= bqd$ $=$ gr. 120); cioè l'angolo $DrB =$ gr. 60, è eguale all'angolo drB pure $=$ gr. 60, seguita che DB, Bb lati opposti ad angoli eguali siano eguali; siccome pure per la medesima

ſima ragione ſeguita, che ſia Dr = *rb*; De = *eb*; Do = *ob*; Dh = *hb*; DS = *Sb*; DT = *Tb*; ſupponendo già deſcritte le linee che mancano in figura.

Si rileva pure, che il raggio *ce* del circolo circoſcritto ad un 12gono ſia eguale ad *eb* ſuttenſa a due lati di detto 12gono, perchè eſſa diventa lato di un Eſagono.

Si ritrova ancora nell'antecedente modo, che D*t* = *t*c; D*e* = *e*c; D*m* = *m*c; D*n* = *n*c &c., così non altrimenti KV = VD = DP. Non deve parer nè men ſtrano, che ſia $BD = \frac{Do}{2}$; giacchè il triangolo *o*BD è ſimile al triangolo F*ag*; onde ſiccome il lato di queſto F*g* l'abbiamo trovato doppio del lato *ga*, così il lato ſimile D*o* di quello viene ad eſſer doppio del ſimile lato BD.

137. Tutte queſte eguaglianze diverſe ſi ſono annoverate, acciò, volendo, ſi poſſano ſoſtituire in luogo d'altri termini compreſi nelle proporzioni ſpettanti a queſto Poligono, e delle quali ſi produrrà il numero (n. 145.) a ſuo luogo.

PROPOSIZIONE V.

Primo. Le rette FQ, QZ, ZR *ſono tre lati di un* 12*gono.*
Secondo. Le rette FQ, QM, MV *ſono tre lati di un Eſagono.*
Terzo. Inſcritto entro un circolo che paſſa &c.

138. La dimoſtrazione di queſta Propoſizione è a un di preſſo la medeſima, che le altre coſe pari, fu propoſta negli Articoli antecedenti. Perchè dette rette ſono eguali; e perciò che riguarda gli angoli fra eſſe intercetti, le prime comprendono un angolo di gr. 150 alla periferia di un 12gono; le altre di un angolo di gr. 120., angolo alla periferia di un 6gono &c.

ARTICOLO UNDECIMO.

Osservazioni sopra li Poligoni in generale.

Tratteniamoci ora alquanto d'intorno a certi rapporti, o convenienze, che occorrono ne' Poligoni in generale, e che occuparono già la mia attenzione, e non dovrebbero niente meno soddisfare la curiosità de' Filosofi. Come sarebbe o rispetto al valore degli angoli, o al numero delle intersezioni, che si generano producendo i loro lati, o pure rispetto al numero delle ordinate conducibili da angolo ad angolo; così al numero delle contin. geom. propor. e ad altre particolarità, che proporrò d'esaminare nelle seguenti Proposizioni. Onde

PROPOSIZIONE I.

Gli angoli formati dai lati prodotti di un Poligono tanto più sono acuti, quanto più sono distanti dal centro della Figura.

139. La ragion di ciò spicca da se, nè può avvenirne altrimenti, perchè nel 12gono per esempio immaginando che il lato *oe*, rispetto al lato *og* supposto immobile, muti luogo, e passi in *de*, poi in *bd*, indi in *ab* &c. gli angoli compresi tra questi due lati prodotti *eog*, *dmg*, *bGg*, *aDg* &c. si devono fare più acuti, perchè secondo che detti lati occupano su la periferia un punto più l'uno dall'altro distante, il loro punto d'intersezione s'allontana, finchè pervenuti detti lati a due situazioni diametralmente opposte, e massimamente distanti, quali sono le due *go*, *ul*, svanisce il punto d'interseziore, e detti lati prodotti sono arrivati nell' infinito, e perciò diventati paralleli; dal qual stato pro-

progredendo innanzi ritornano, e diventano anche convergenti dalla parte opposta, come *n3*, *og*, che s'interſecano nel punto R.

Conseguenza.

140. Non v' ha dubbio perciò, che un lato, il quale come tangente muovaſi per tutti i punti della periferia di un circolo, non formi, riſpetto ad un altro lato prodotto ed immobile, tutti gli angoli appartenenti ad infiniti Poligoni.

Annotazione.

141. Per ſapere poi con qual legge detti angoli ſcemino più che dal centro ſono rimoti, notaremo principalmente che (traſportata per eſempio parte della *Fig.* 10. del 9gono nella 11. *Tav.* 30.) ne' Poligoni di denominatore diſparo l'angolo al centro (che è eguale all'angolo eſterno QD*e*) ſta all' angolo alla periferia *e*D*n* ſempre come 2 al numero denominatore meno 2: nell' addotto eſempio come 2 a 7 = 9 − 2. Ne' Poligoni di denominatore pari detto angolo al centro ſempre ſta all' angolo alla periferia, come 1 alla parte minore di due parti ineguali maſſime poſſibili del numero denominatore: nel 8gono per eſempio come 1 a 3 (= 8 − 5) parte minore delle due parti ineguali maſſime poſſibili 3, e 5. Ciò che ſi rileva anche dalla prima Propoſizione ſpettante a ciaſcun Poligono, e da una Tavola, che or ora (n. 156.) produrremo, che comprende la ragione appunto di detto angolo al centro, all'angolo, alla periferia.

142. In ſecondo luogo oſſervate ciò che è coſtante in tutti i Poligoni, cioè che li due angoli alla baſe di ciaſcun triangolo deſcritto in Figura BEN, *o*NQ, *e*QD preſi

si insieme, sono eguali all'angolo *eDn* alla periferia; onde BEN + BNE = *eDn*: cioè (segnati i numeri, che sono i minimi esponenti del valore rispettivo di ciascun differente angolo, che occorre in figura) 1 + 6 = 7. Così ancora ONQ + OQN = *eDn*: cioè 3 + 4 = 7. Resta *e*QD + *e*DQ = *eDn*: cioè 5 + 2 = 7. Gli angoli poi di ciascun triangolo presi insieme sono eguali al numero denominatore, perchè essendo l'angolo esterno sempre eguale a 2, risulta 1 + 6 + 2 = 7 + 2 = 9; e gli altri 3 + 4 + 2 = 7 + 2 = 9; e 5 + 2 + 2 = 7 + 2 = 9.

143. Finalmente per venire a quanto appartiene in particolare a questa Annotazione, si deve riflettere, che ne' Poligoni di denominatore disparo, gli angoli più che sono distanti dal centro della Figura decrescono dalla medesima parte a destra de' lati prodotti, e dalla medesima parte a sinistra crescono per il binario; cosicchè decrescono come 7. 5. 3. 1 a destra; ovvero crescono a sinistra come 2. 4. 6. Nei Poligoni poi di denominatore pari decrescono per la medesima parte a destra, e crescono a sinistra per unità.

PROPOSIZIONE II.

Le diverse serie de' termini proporzionali, che troviamo nella figura di un Poligono costrutta come si è fatto, sono tante, quante sono le interseziooni diverse, che in essa occorrono sopra una medesima linea.

144. Questa Proposizione è evidentissima, perchè se per determinare il principio ad una serie di termini proporzionali si siamo in fatti prefissi di voler prendere un punto di stazione in ogni diversa intersezione che occorra su la medesima retta, il numero delle dette serie non può non

essere

essere eguale al numero delle intersezioni. Quindi (*Fig.* 7. *Tav.* 29.) nell' Ettagono per esempio 3 essendo detti diversi punti d'intersezione E, Z, h, sono 3 anche le serie. La prima rispetto al punto E, cioè

EZ. ZD :: Eh. h*p* :: E*b*. *bq* :: ES. SN :: EH. HK.

La seconda rispetto al punto Z, perchè

Zh. ho :: Z*b*. *bp* :: ZS. SM :: ZH. HV :: ZQ. QE.

La terza rispetto al punto h. Onde

h*b*. *bo* :: hS. SD :: hH. HA :: hT. TZ :: hF. FE.

145. Ma ciò che molto più importa d'osservare, è che vi ha un certo numero di termini (sono 10 nell' addotto esempio) per ciascuna serie, dai quali risultano diverse eguaglianze de' pieni prodotti da detti termini proporzionali moltiplicati insieme. Supponiamo che detti termini siano

2. 1 :: 4. 2 :: 6 * 3 :: 8. 4 :: 10. 5.

Onde avremo prima queste eguaglianze

$1 \times 4 = 2 \times 2; 2 \times 6 = 4 \times 3; 3 \times 8 = 6 \times 4; 4 \times 10 = 8 \times 5.$

E poi quest' altre $2 \times 5 = 1 \times 10; 4 \times 4 = 2 \times 8$. E perciò nell' 7gono sono 6 eguaglianze per ciascuna serie, e sono 18 per tutte insieme. La Tavola annessa presenta in un tratto il numero delle intersezioni, e serie di ciascun Poligono; il numero de' termini di ciascuna serie; ed il numero delle eguaglianze prodotte dai predetti termini moltiplicati insieme.

TA-

TAVOLA

Del numero delle Interfezioni, e Serie, Termini, ed Eguaglianze de' piani comprefi in quefti Poligoni.

Nel	3gono	Interf.ni e Serie fono	1	Termini		Egual.	
	4gono		1				
	5gono		2		6		3 × 2 = 6
	6gono		2		6		3 × 2 = 6
	7gono		3		10		6 × 3 = 18
	8gono		3		10		6 × 3 = 18
	9gono		4		14		9 × 4 = 36
	10gono		4		14		9 × 4 = 36
	11gono		5		18		12 × 5 = 60
	12gono		5		18		12 × 5 = 60
							240

Si vede dunque che il 10gono per efempio ha 4 interfezioni, e per confeguenza 4 ferie di differenti proporzioni; ciafcuna delle quali ferie è compofta di 14 termini; da quali fi creano 9 eguaglianze diverfe di differenti piani. Quefte eguaglianze effendo 9 per ciafcuna ferie, moltiplicate perciò per il numero delle ferie 4, rifultano 36. La fomma poi di tutte le eguaglianze di tutti i Poligoni comprefi nella Tavola prefe infieme afcende a 240. Delle quali negli Articoli antecedenti io non ne ho moftrate che pochiffime, o perchè non mi parve che aveffero una certa aria d'eleganza, o ancora perchè io era perfuafo, che altri poteffe di leggiero ripaffarle fotto a' fuoi occhj da fe, foftituendo anche in effe que' termini, i quali foffero (come abbiamo avvertito alcuna volta) trovati in figura ad altri termini eguali.

PRO-

PROPOSIZIONE III.

Le ordinate condotte dai angoli di un Poligono al diametro del circolo, in cui è inscritto, producono un numero di piani comparabili eguale alla somma di una progressione crescente per unità, meno l'ultimo termine, che sempre è eguale al numero delle ordinate moltiplicato per 3.

146. E' da osservare in primo luogo, che a qualunque ordinata, perchè fa nel diametro due assisse, hanno relazione tre quadrati, o 3 rettangoli, de' quali comparandoli insieme, si potrebbe indagarne il rapporto. Nel 5gono per esempio (*Fig.* 4. *Tav.* 29) all'ordinata Mm appartengono 3 quadrati $\overline{AM}^2$, $\overline{mM}^2$, $\overline{Mr}^2$ ovvero li 3 rettangoli equivalenti rAm, rmA, Arm; all'ordinata Qn si aspettano li 3 quadrati $\overline{rQ}^2$, $\overline{nQ}^2$, $\overline{AQ}^2$, oppure li 3 equivalenti rettangoli Arn, Anr, rAn. Ora nel pentagono, come ben si vede, le ordinate sono due Mm, Qn; bisogna dunque moltiplicare questo numero 2 dell'ordinate per il 3 numero de' piani, che appartengono a ciascuna ordinara, e verrà 6, cioè 6 piani, o quantità superficiali, o termini che si vogliono comparare a due a due.

Supponiamo dunque che questi sei termini siano per esempio *a. b. c. d. e. f* ed esaminiamo quanti binarj ne risultino. Ben si vede, che sono $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 =$ alla somma di una progressione crescente per unità meno 6 ultimo

a. b. c. d. e. f
ab. bc. cd. de. ef.
ac. bd. ce. df.
ad. be. cf.
ae. bf.
af.

termine eguale, come ſi è moſtrato, al numero dell' ordinate moltiplicato per 3. Ciò che era quanto dovevaſi dimoſtrare.

Annotazione I.

147. Lo ſcopo dunque di queſta Propoſizione è di moſtrare primieramente quanti piani appartenghino per queſto ſolo riguardo ad un Poligono dato. Secondo quanti caſi di comparazione di eſſi piani contenga: cioè quanti binarj, giacchè non ſi potrebbe ſapere il rapporto di eſſi piani, ſe non ſi paragonaſſero inſieme a due a due.

Per altro non è biſogno di andare in cerca del ſopraddetto numero 15 col formare tutta la piramide; ma baſta operare ſecondo la regola per rilevare la ſomma di una progreſſione, di cui foſſe l'ultimo termine per eſempio il 5 numero diſparo, e foſſe pure 5 il numero de' termini, come nelle progreſſioni creſcenti per unità accade. Onde ſupponendo l'ultimo termine $= a$; il numero de' termini $= b$; la ſomma de' termini $=$ M; verrebbe M (nel noſtro caſo $= 15$) $= \overline{a + 1} \times \frac{b-1}{2} + \frac{a+1}{2}$. E ſe il numero de' piani invece di eſſere 6, foſſe per eſempio 9, coſicchè l'ultimo termine della progreſſione riſultaſſe 8 numero pari, in tal caſo ſarebbe M ($= 36$ numero cercato) $= a + 1 \times \frac{a}{2}$.

Anotazione II.

248. Non mi pare coſa ſuperflua di produrre una Tavola, che contenga il numero delle Ordinate di ciaſcun Poligono; il numero delli Piani, che ſi devono comparare a due a due; ed il numero de' Binarj, che riſulta da eſſo numero de' piani.

TA-

TAVOLA,

Che contiene il numero delle Ordinate; il numero de' Piani ſpettanti ad eſſe Ordinate; il numero de' Binarj, o ſia de' caſi di comparazione a due a due.

Nel	Ordinate	Piani	Binarj
3gono	1	3	3
4gono	2	6	15
5gono	2	6	15
6gono	3	9	36
7gono	3	9	36
8gono	4	12	66
9gono	4	12	66
10gono	5	15	105
11gono	5	15	105
12gono	6	18	153
			584

Di tutti queſti 584 Piani non ne ho eſpoſti altri che tre nel 5gono ivi già (n. 38.) rimarcati, per non caricarmi di un eſame ſenza fine, e perchè fors' anche ſarebbe ſtato difficile o impoſſibile l'additare nella figura li eſponenti del loro rapporto. Laonde baſti per ora di aver conoſciuto, quanto per queſto riguardo, e per quanto ſi è moſtrato nella Propoſizione antecedente, quanto diſſi, avrebbeſi a fare in un ſolo Poligono qualunque, di cui veniſſe a taluno in animo di darne un minuto ragguaglio.

PROPOSIZIONE IV.

Descrivendosi i Poligoni nella maniera da me insegnata, intorno allo stesso centro, intorno a cui si descrive un Poligono di dato denominatore d, *se ne descrive tante volte un altro di dato denominatore* a, *quante volte* d *contiene* a; *talmente che se* d = na, *il Poligono di denominatore* a *si descrive intorno al centro dell' altro Poligono di denominatore* d *numero di volte* n.

149. Supponiamo $n = 2$; $a = 4$; quindi sarà il numero denominatore $d = n \times a = 2 \times 4 = 8$, e la Figura sarà un 8gono, il quale (*Fig.* 8. *Tav.* 29.) nell' esser descritto fa nascere appunto 2 quadrati $eTdh$, $LRbI$. Ma non potevamo già aspettarsi altrimenti, imperocchè trovandosi di 4 lati PB, NM, DQ, FG, due PB, DQ, e poi due altri NM, FG alternatamente disposti l'uno dirimpetto all'altro e paralleli, prodotti poi anche che sono stati, perchè perciò non si guastò la loro situazione, non poterono che formare un quadrato $eTdh$. Così degli altri quattro lati ancora GP, BN, MD, QF, perchè due GP, MD, indi due altri BN, QF sono pure paralleli e ordinati faccia a faccia, prodotti che siano, formano un altro quadrato $LRbI$.

Nel 10gono (per addurre un altro esempio) si trovano i lati ED, BM, HR, PT, AF vicendevolmente inclinati con un angolo eguale all'angolo DQB di gr. 108 angolo alla periferia di un 5gono; e perciò prodotti che siano formano un 5gono mQg &c. Per la medesima ragione prodotti poi che siano i lati DB, MH, RP, TA, FE formano un altro 5gono apb &c. perchè appunto nel produr-

re

re essi lati non però si guasta la loro reciproca convergenza: discorso che, le altre cose pari, milita per qualunque altro Poligono.

PROPOSIZIONE V.

Descrivendo alla mia maniera un Poligono di denominatore disparo, si descrivono anche 3 lati di un altro di doppio denominatore, e 3 di un altro di denominatore eguale.

150. Nell' ultima Proposizione di tutti li antecedenti Poligoni di denominatore disparo abbiamo dimostrato, che la cosa si passa in fatti così, come abbiamo proposto. Ma non abbiamo addotto più precisamente il perchè così debba veramente succedere, e ciò è appunto quanto, producendo una dimostrazione non già particolare, ma generale, intendo ora di fare.

Trasportata dunque per maggior chiarezza parte della Figura 7.ª per esempio nella 9.ª torno a ridire (*Fig.* 7, e 9., *Tav.* 29.)

Primo. Che le rette QT, TN, NV, indi QT, TM, MA sono eguali.

Secondo. Che l'angolo QTN ovvero TNV compreso dalle prime è angolo alla periferia di un Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono *b d a* &c.

Terzo. Che l'angolo QTM, ovvero TMA compreso dalle seconde è angolo alla periferia di un Poligono simile al Poligono dato *b d, a* &c.

151. Però circa al primo capo essendo la linea TM parallela al lato *da* prodotto in V, le due TM, *d*V fanno alla medesima retta QV gli angoli TMQ, *d*VQ sempre eguali; ma l'angolo *d*VQ è eguale all'angolo MQT posto

sto in simile sito della Figura. Dunque sarà l'angolo TMQ eguale all'ang. TQM. Dunque saranno pure eguali i lati TM, TQ, e per conseguenza tutte le altre rette poste in simile sito MA, TN, NV.

152. Circa al secondo capo è da sapere, che messa una retta TN opposta all'angolo T*d*N angolo alla periferia di un Poligono dato *b d a* &c. in modo che il triangolo TN*d* sia isoscele, l'angolo esterno QTN sarà sempre angolo alla periferia di un Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono dato *b d a* &c. E ciò perchè (n.20.) essendo l'angolo T*d*N alla periferia più l'angolo al centro di un Poligono eguale alla somma di tutti gli angoli del triangolo TN*d*, ed essendo poi l'angolo T*d*N eguale per il supposto all'angolo alla periferia, li due angoli *d*TN, TN*d* presi insieme saranno eguali all'angolo al centro, ed un solo *d*TN (cioè la metà di detto angolo al centro) sarà l'intiero angolo al centro di un Poligono di denominatore doppio del denominatore di quest' altro Poligono *b d a* &c. Ora essendo l'angolo al centro più l'angolo alla periferia eguale a due retti, sarà l'angolo QTN complimento a due retti dell'angolo *d*TN; e però sarà angolo alla periferia del suddetto Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono dato *b d a* &c.

153. Per il terzo capo basta avvertire, che per essere TM parallela ad *ad*, e però facendo ad una medesima retta Q*d* gli angoli QTM, Q*da* eguali, deve risultare il Poligono eretto su il lato QT, ovvero TM, simile al dato poligono *bda* &c. Dunque descrivendo un Poligono &c. Ciò che era in tutto da dimostrare.

PRO-

PROPOSIZIONE VI.

Primo. L'angolo retto sta all' angolo al centro di qualunque Poligono, come il suo denominatore sta al 4 numero costante.

Secondo. L'angolo retto sta all' angolo alla periferia di qualunque Poligono, come il suo denominatore sta al denominatore, più la differenza di esso denominatore al 4 numero costante.

154. Questa Proposizione è comunemente ricevuta, ma non so che sia dimostrata. Quando perciò io ho detto, che l'angolo retto sta all'angolo al centro di un Poligono (sia per esempio un pentagono), come sta il suo denominatore al 4 numero costante, era lo stesso che dire, che $\frac{1}{4}$ di un circolo sta ad $\frac{1}{5}$, come 5 a 4. Ma ciò è evidente perchè $\frac{1}{4} . \frac{1}{5} :: \frac{5}{20} . \frac{4}{20} :: 5 . 4$. E perchè poi qualunque sia il Poligono dato abbiamo sempre da una parte dell' analogia per primo termine di comparazione $\frac{1}{4}$, cioè un angolo retto, così dall' altra parte avremo sempre per ultimo termine un 4.

155. Per prova poi della seconda parte di questa Proposizione è da riflettere che (*Fig.* 4., *Tav.* 29.) l'angolo alla periferia GPQ più l'angolo esterno QPB (ovvero McQ al centro, cui è eguale) di qualunque Poligono essendo eguale a due retti, ed essendo pure un retto aggiunto a se stesso eguale a due retti, l'angolo retto si ritrova medio aritmetico tra l'angolo al centro, e l'angolo alla periferia; e quindi per la natura delle progressioni aritmetiche la differenza

renza

renza tra l'angolo al centro, e l'angolo retto risulta la medesima che passa tra detto angolo retto, e l'angolo alla periferia.

Ciò premesso l'angolo retto, più la differenza di detto angolo all'angolo al centro, sarà eguale all'angolo alla periferia, cioè sarà $= 5 + 1$; giacchè nel medesimo esempio del 5gono abbiamo osservato, che l'angolo retto sta all' angolo al centro, come 5 a 4, onde la differenza risulta $= 1$. Ma il numero denominatore è 5. Dunque l'angolo retto ($= 5$) sta all'angolo alla periferia ($= 5 + 1$), come il denominatore 5 sta al medesimo denominatore $5 +$ la differenza 1 di esso denominatore 5 al 4 numero costante. Un tal discorso sussiste, le altre cose pari per qualunque altro Poligono; onde s'intende dimostrato, quanto era proposto.

Annotazione. I.

156. Una Tavola esibita (1) dal P. Andrea Tacquet mostra la ragione, che nei Poligoni passa tra l'angolo retto, e l'angolo alla periferia, acciò per essa si possa sopra un dato lato ergere un qualunque dato Poligono. Io qui inerendo a quanto contiene la presente Proposizione ne produrrò un'altra, la quale non solo rappresenti la suddetta ragione, ma anche quella del medesimo angolo retto all'angolo al centro. Perchè quindi in un circolo dato si possa descrivere un qualunque Poligono, non già tentando la divisione sopra tutta la periferia del dato circolo, ma sopra un solo quadrante. Avvertendo che i comuni divisori adoperati nel costruerla non sono sempre i massimi, acciò più chiaro apparisca quant' ho proposto.

TA-

(1) *Elem. Geom.* Lib. 4.; Prop. 16.; Prob. 2.

TAVOLA.

		Ang. al centro	Ang. retto	Ang. alla perif.ª					Diff.ª
	4gono	90	90	90	::	4	4	4	0
	5gono	72	90	108	::	4	5	6	1
	6gono	60	90	120	::	4	6	8	2
	7gono	$51\frac{3}{7}$	90	$128\frac{4}{7}$	::	4	7	10	3
Nel	8gono	45	90	135	::	4	8	12	4
	9gono	40	90	140	::	4	9	14	5
	10gono	36	90	144	::	4	10	16	6
	11gono	$32\frac{8}{11}$	90	$147\frac{3}{11}$	::	4	11	18	7
	12gono	30	90	150	::	4	12	20	8

Notate che queſto ſegno :: ſignifica, che li tre numeri anteposti al ſegno ſono in proporzione ordinata, come li tre numeri poſteriori. Onde trovando nel 7gono per eſempio 90. $128\frac{4}{7}$ :: 7. 10 = 7 + 3, vuol dire, che l'angolo retto 90 ſta a $128\frac{4}{7}$ angolo alla periferia di un ettagono, come il denominatore 7 ſta al medeſimo denominatore 7 + il 3 differenza di detto 7 al 4 numero coſtante: ſta, diſſi, come 7 a 10. Onde diviſa la periferia di un quadrante in parti 7, ed aggiunto un arco di 3 altre di dette parti, ſarà tutto detto arco miſura dell'angolo alla periferia del propoſto 7gono. Se per il medeſimo eſempio ſi conſideri, che nella Tavola v'è $51\frac{3}{7}$. 90 :: 4. 7. ſignifica che diviſo un quadrante di un circolo dato in parti ſette, l'arco eguale a 4 di eſſe parti ſarà miſura dell'angolo al centro del medeſimo 7gono.

Annotazione II.

157. Nella medesima Tavola si vede ancora, che l'angolo retto è medio aritmetico tra l'angolo al centro, e l'angolo alla periferia, siccome abbiamo asserito di sopra; perchè nell' 11gono per esempio stando i numeri 4. 11. 18, come $32\frac{8}{11}$. 90. $147\frac{3}{11}$, dall' addizione de' piccoli esponenti $4 + 18 = 11 + 11$ si rileva molto più presto che anche $32\frac{8}{11} + 147\frac{3}{11} = 90 + 90$. Da questa Annotazione seguita poi, che noto l'angolo al centro si viene in cognizione dell'angolo alla periferia, e reciprocamente. Così nel 9gono per esempio noto l'angolo al centro 40, avremo $90 + 90 - 40 = 140$ angolo alla periferia. Siccome $90 + 90 - 140 = 40$ angolo al centro di detto 9gono.

PROPOSIZIONE VII.

Qualunque numero (maggior del 3) di lati eguali ordinati nella periferia di un circolo dato (Tav. 33.) può fornire tre contin. geom. propor. mp, bq, dg; *delle quali la prima* mp *unisce i punti di concorso di due lati prodotti* db, gq, *e di due* qa, bn *prodotte pure, e suttense ad 1 lato, se nella Figura i lati sono 4 (Fig. 15); a 2 lati, se i lati sono 5 (Fig. 16); a 3 lati, se i lati sono 6 (Fig. 17), &c. le altre due* bq, dg *uniscono le estremità di due lati nella Figura massimamente distanti.*

158. Ora non vogliate già aspettare la prova di questa elegantissima Proposizione, perchè è la medesima generalissima adoperata nelle seconde degli Articoli antecedenti. Sappia-

piate piuttosto, che essa contiene in somma non solo quanto si enunziò nelle seconde Proposizioni suddette. Ma propone inoltre che dette seconde Proposizioni siano vere in qualunque altro Poligono superiore. Cioè che la seconda per esempio del 7gono sia vera non solo nell'8gono, come si dimostrò n. 78; ma in qualunque altro Poligono superiore 9gono, 10gono &c. quando si restringa la costruzione d'intorno a tanti soli lati, quanti si adoperarono in detto Ettagono, che furono 4, cioè *bh*, *ho*, *op*, *pq* compresi nel triangolo *b*E*q*. Onde qualunque Poligono sia, per esempio la Fig. 15, basta che in essa si restringa la costruzione d'intorno a 4 soli lati per ottenere 3 contin. geom. propor. *mp*, *bq*, *dg* nel medesimo modo, che si ottennero per mezzo dell'7gono. Così se tutte le Figure della Tavola 33 fossero sempre un 17gono, secondo che la costruzione versasse d'intorno a' lati 4, 5, 6 &c. di esso 17gono, le proporzionali *mp*, *bq*, *dg* risultarebbero bensì di ordine differente, ma sempre come nelle Figure 15, 16, 17 &c. contin. geometriche.

159. Di più se i lati della data Fig. 15 ovvero 16 &c. non fossero nè meno parti aliquote di un qualche Poligono, e qualunque fosse grande o piccola la periferia, su la quale sono ordinate (purchè non si dilatassero oltre la metà di essa se non di un mezzo lato, come occorse in tutte le seconde proposizioni de' Poligoni di denominatore disparo) la Proposizione mai perciò sarebbe meno sicura. Laonde trovandola io sì bella e sì estesa mi duole a dir vero assai, che non sorgendo essa che pur ora da una sola arida speculazione, le sovraggiunte mie occupazioni presenti non m'abbiano permesso di recarla a qualche solida utilità, o almeno di spingerla un poco più innanzi e dilatarla insieme con l'altre poche osservazioni, che sono anzi un aborto, che un parto dello scarso mio ingegno.

ARTICOLO DUODECIMO.

Descrizione organica di detti Poligoni.

160. Avvenga che io abbia già applicato a questa descrizione due altri Istromenti, uno chiamato PENNA GEOMETRICA, l'altro COMPASSO LOXODROMICO, e benchè pure altri si usino, e che potrei proporne anche degli altri forse in pratica migliori, nonostante m'induco a produrne uno, il quale, se non altro per una tal quale sua vaghezza, merita qualche considerazione. Egli è (*Fig.* 21. *Tav.* 34.) composto di 6 volte tanti regoli, e 3 volte tanti pivoli, quanti sono i lati della Figura. Cinque di essi regoli *ad*, *de*, *en*, *ag*, *gm* debbono essere eguali, e mobili d'intorno a pivoli, coi quali stanno insieme connessi, ed un altro regolo *am* deve concepirsi mobile d'intorno ad un pivoletto *e* comune a 4 di detti eguali regoli; e nelle due fessure una da *e* verso *m* si faccia, che riceva il pivolo *m*, che può dentro per il lungo sdrucciolare da *m* fino ad *e*, e che connette due regoli; e nell'altra fessura da *e* verso *a* riceva il pivolo *a*, che ne congiunge quattro, e che può scorrere liberamente da *e* fino ad *a*. I pivoli poi *a*, *m*, *n*, *d*, e tutti gli altri posti in simil luogo della Figura si dilatino un poco in cerchio dalla parte inferiore, e per di sopra siano costrutti a spira con la sua vite, acciò possano tenere i regoli insieme uniti. I pivoli *e*, *g*, *b*, e tutti quelli che stanno alla medesima distanza dal centro della Figura siano non solo fabbricati a quest'oggetto come quelli, ma per di sotto lunghetti più di quelli terminino in una punta, acciò toccando essi soli al piano, possano marcare un punto su la carta.

161. Da una tale costruzione parmi di dover aspettare un effetto, che è grande ardimento l'asserirlo senza averne anticipatamente fatta prova. Cioè che levando via i pivoli

m,

m, *e*, *a*, ed aprendo l'ordigno in fuori, restino tuttavia i lati *d*h, hK, KL &c. sempre ordinati nella periferia di un maggior circolo, di cui i regoli *dn*, *u*h &c. ne rappresentino i raggi. Come per contrario tolta via una parte *am*, *dn*, ovvero due *am*,h*u*, e restringendolo, i lati che restano rimanghino disposti nella periferia di un circolo minore.

162. Ciò mi par vero, perchè non posso concepire mosso per esempio un regolo *am*, che nel medesimo istante anche tutti gli altri regoli non si muovano altrettanto per causa della vicendevole loro connessione; cosicchè parmi che non possa muoversi un regolo *am*, che gli angoli *mad*, *nda* alla periferia non rimanghino tuttavia eguali. Dunque dovendosi anche gli altri regoli muovere altrettanto, anche gli angoli circa essi alla periferia rimarranno parimenti eguali; e quindi i lati *ad*, *d*h &c. sempre costituiti nella circonferenza di un circolo unica curva che, come notammo anche altrove, sempre inclini, e sempre egualmente alla medesima parte.

163. Volendo pertanto descrivere un Poligono maggiore del 12gono rappresentato in figura, bisognerebbe aggiugnere all'istromento tante parti, quante per il nuovo Poligono occorressero. E volendo descriverne un minore avrebbesi a tagliar via le superflue; perchè poi e nell'uno, e nell'altro caso premendo alquanto i pivoli *e*, *g*, *b* &c. lasciassero sul piano della carta impressi tanti punti, quanti fossero i lati del proposto Poligono. Ma si avverte che detto istromento non potrebbe essere diminuito, se non di due sole parti, e però fornire un 10gono. Perchè i punti di connessione *m*, *n*, *u* e tutti gli altri simili si troverebbero in tal caso pervenuti fino al centro c, dove gli regoli pur ivi concorsi facendo a se stessi intoppo, non potrebbero passar più oltre. Tuttavia l'istromento ordinato al 12gono somministra anche la descrizione del triangolo,

golo, del 4to, dell' 6gono, lasciando andar vani dei segnati punti, 4 nel primo caso, 3 nel secondo, 2 nel terzo alternatamente. Ed occorrendo il pentagono si ordini l'istromento al 10, o al 15gono, o ad altro Poligono di denominatore multiplo del denominatore del proposto Poligono, lasciando poi alternatamente andar vano un punto sì e l'altro no nel primo caso; due sì ed uno no nel secondo &c. E così si proceda anche per l'7gono, ed il 9gono, aggiungendo all'istromento tante parti, quante abbisognarebbero per un Poligono di denominatore multiplo del denominatore del Poligono dato.

Annotazione.

164. Da quanto si espose in proposito del 10gono facilmente si deduce, che, ordinato l'istromento a detto Poligono, ***madn*** diventarebbe un triangolo, di cui i lati ***am***, ***dn*** risultarebbero divisi *media & extrema ratione* in *g* ed *e* pivoli connettenti li regoli rispettivi.

I L F I N E.

NOI RIFORMATORI
DELLO STUDIO DI PADOVA.

AVendo veduto per la fede di revisione, ed approvazione del P. F. Giacinto Maria Marini Inquisitor Generale del S. Offizio di Venezia, nel Libro intitolato: *Nuovi Istromenti per la descrizione di diverse Curve antiche e moderne &c. del Conte Giambatista Soardi Bresciano*. Ms. non v' esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per attestato del Segretario Nostro, niente contro Principi, e buoni costumi, concedemo licenza a Gian-Maria Rizzardi Stampatore in Brescia, che possi esser stampato, osservando gli ordini in materia di Stampe, e presentando le solite copie alle Pubbliche Librarìe di Venezia, e di Padova.

Dat. li 11. Maggio 1752.

[*Z. Alvise Mocenigo 2°. Cav. Rif.*
[
[*Daniel Bragadin Cav. e Proc. Rif.*

Registrato in Libro a carte 4. al num. 48.

Michiel Angelo Marini Segr.

Tav. I




BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI



IV. III.


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI

'av. IV


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

av. V






BIBLIOTECA NAZIONALE
NAPOLI

Tav. VIII

C


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" -
NAPOLI

Tav. X

3
4
5


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

7. XI



4




NAPOLI

XIV


NAPOLI

V



XVII


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

g

>






NAPOLI

Tav. XX

Tav. XXI


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI






Q
C
c


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI



m

o

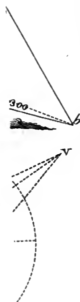
n

d


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI

Tav. XXV


4
P
n
Q


300
b
V


NAPOLI

Tav. XXVII



L




NAPOLI

Tav. XXIX


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI


NAPOLI

XXI




BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI









XXIII





